Exercices d'application

□ Exercice 5.1. Vérification d'homogénéité

1 – Non homogène, u étant le seul terme non homogène à une résistance on peut chercher une division par R manquante.

2 – Homogène

3 – Homogène

4 – Le rapport est homogène à une résistance ; il manque donc une intensité.

5 – Homogène

□ Exercice 5.2. Loi des nœuds

1. On applique la loi des nœuds qui donne $I + I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$, d'où l'on tire $\boxed{I = I_3 + I_4 - I_1 - I_2}$. Application numérique : $\boxed{I = -2\text{ A}}$.

2. Le signe négatif du courant I indique que, physiquement, un courant de 2 A circule dans le sens contraire à celui de la flèche.

□ Exercice 5.3. Loi des mailles

On choisit arbitrairement pour chaque maille un sens de parcours horaire. La loi des mailles appliquée à la maille en haut à gauche du circuit donne $-U_1 - U_3 + U_4 - U_5 = 0$, d'où l'on tire $\boxed{U_4 = U_1 + U_3 + U_5}$. AN $\boxed{U_4 = 9\text{ V}}$.

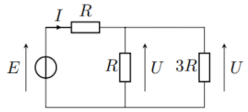
La maille en haut à droite donne $-U_2 + U_6 - U_7 + U_3 = 0$, d'où l'on tire $\boxed{U_7 = 7\text{ V}}$.

En procédant de même avec d'autres mailles (il y a plusieurs possibilités), on obtient $\boxed{U_{10} = 15\text{ V}}$ et $\boxed{U_{11} = 26\text{ V}}$.

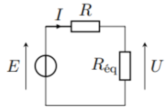
Le sens de parcours choisi n'a aucune influence sur le résultat.

□ Exercice 5.4. Circuits simples

1. On voit déjà que U est la tension aux bornes des deux résistances de droite, car elles sont en parallèle :



On peut regrouper ces deux résistances et encore avoir la tension U :



Avec $R_{éq} = \dfrac{R \times 3R}{R + 3R} = \dfrac{3R}{4}$.

On est alors dans une situation de diviseur de tension :

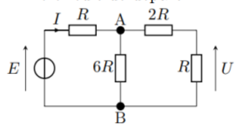
$$U = E \times \frac{R_{éq}}{R_{éq} + R} = E \times \frac{\frac{3R}{4}}{\frac{3R}{4} + R} = E \times \frac{\frac{3R}{4}}{\frac{7R}{4}} = E \times \frac{3}{7},$$

soit donc : $\boxed{U = \dfrac{3E}{7} = 1,29\text{ V.}}$

Pour le courant I : on peut utiliser le tout dernier schéma, car on a :

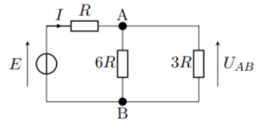
$$I = \frac{U}{R_{éq}} = \frac{\frac{3E}{7}}{\frac{3R}{4}}, \text{ soit } \boxed{I = \frac{4E}{7R} = 1,14\text{ mA.}}$$

2. Le circuit de départ :



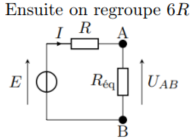
On calcule d'abord la résistance équivalente entre A et B :

On regroupe d'abord R et $2R$:



Attention : en faisant ceci, on a perdu la tension U. Elle est « noyée » dans la résistance équivalente et ce schéma ne peut plus permettre de la trouver. Il faudra à la fin retourner au schéma de départ du circuit.

Ensuite on regroupe $6R$ et $3R$ qui sont en parallèles :

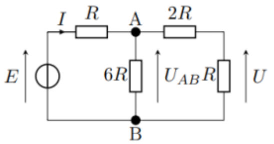


Avec $R_{éq} = \dfrac{6R \times 3R}{6R + 3R} = 2R$.

Il faut voir qu'on a toujours les points A et B, et donc toujours la tension U_{AB}. On la détermine avec un diviseur de tension (possible car les deux résistances restantes sont en série) :

$$U_{AB} = E \times \frac{R_{éq}}{R_{éq} + R} = E \times \frac{2R}{2R + R} = \frac{2E}{3}.$$

Pour trouver U, on doit revenir au schéma de départ, sachant que maintenant on connait l'expression de U_{AB} :



$2R$ et R tout à droite sont en série donc on peut appliquer un diviseur de tension. La tension totale est U_{AB}. Donc :

$$U = U_{AB} \times \frac{R}{R+2R} = U_{AB} \times \frac{1}{3} = \frac{2E}{3} \times \frac{1}{3} \text{ , soit : } \boxed{U = \frac{2E}{9} = 0,67 \text{ V.}}$$

Pour le courant I : notons U_1 la tension dans la résistance la plus à droite, en convention récepteur.

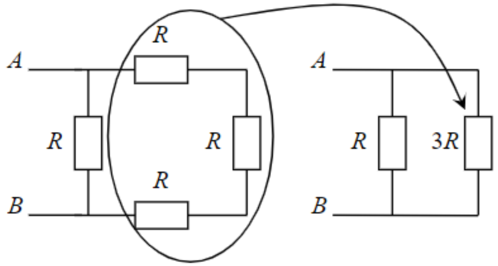
On a donc $I = \frac{U_1}{R}$, mais il faut trouver U_1.

On fait une loi des mailles dans la grande maile : $E - U_1 - U_{AB} = 0$, donc $U_1 = E - U_{AB} = E - \frac{2E}{3} = \frac{E}{3}$.

On a donc : $\boxed{I = \frac{E}{3R} = 0,67 \text{ mA.}}$

☐ Exercice 5.5. Résistance équivalente

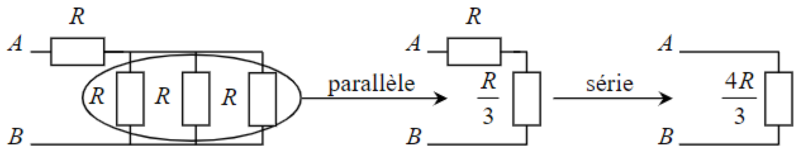
1. On commence par l'association évidente des trois résistances en série.



La résistance équivalente globale est constituée par deux résistances en parallèle, soit $\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R}$ dont on déduit $\boxed{R_{éq} = \frac{3}{4}R}$.

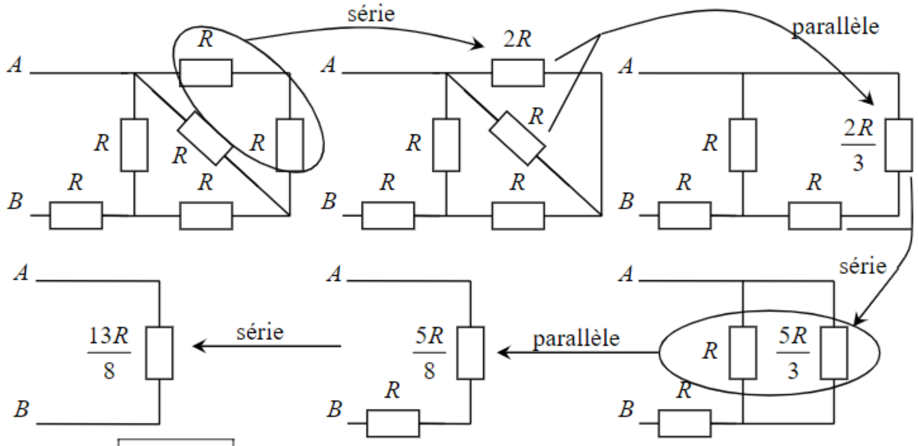
✎ *Quand des résistances sont associées en série, la résistance équivalente est toujours* plus grande que la plus grande *des résistances initiales : ici* $3R > R$. *Quand des résistances sont associées en parallèle, la résistance équivalente est toujours* plus petite que la plus petite *des résistances initiales : ici* $\frac{3}{4}R < R$.

2.



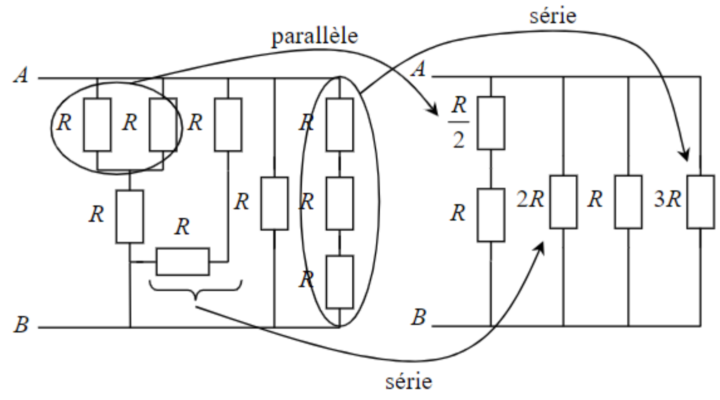
Donc $\boxed{R_{éq} = \frac{4}{3}R}$.

3.



On a trouvé $\boxed{R_{éq} = \frac{13}{8}R}$.

4.



On note que la branche de gauche (association série) peut être remplacée par une résistance $\frac{3R}{2}$.

Donc la résistance équivalente à cette association parallèle de quatre résistances est $\boxed{R_{\text{éq}} = \frac{2R}{5}}$.

□ Exercice 5.6. Pont diviseur

1. On applique directement la formule du pont diviseur de tension pour des résistances en série et l'on obtient : $\boxed{U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E}$ et $\boxed{U_1 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} E}$. AN $\boxed{U_2 = 5{,}0\ \text{V}}$ et $\boxed{U_1 = -5{,}0\ \text{V}}$.

La tension aux bornes de R_1 et celle aux bornes de l'ensemble sont de sens opposés, il faut donc un signe négatif dans la seconde formule. Par ailleurs, les données ayant deux chiffres significatifs, on donne deux chiffres aussi dans les résultats, donc ne pas oublier le 0 après la virgule : il donne une information !

2. Les résistances R_1 et R_3, qui sont en parallèle, peuvent être remplacées par une résistance équivalente $R_{\text{éq}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 750\ \Omega$. On peut ainsi utiliser la formule du diviseur de tension et l'on obtient $\boxed{U_1 = \frac{R_{\text{éq}}}{R_{\text{éq}} + R_2} E}$ et $\boxed{U_2 = \frac{R_2}{R_{\text{éq}} + R_2} E}$. AN $\boxed{U_1 = 4{,}3\ \text{V}}$ et $\boxed{U_2 = 5{,}7\ \text{V}}$.

3. Avec la formule du diviseur de courant : $\boxed{I_1 = -\frac{G_1}{G_1 + G_3} I_0 = -\frac{R_3}{R_1 + R_3} I_0}$. AN $\boxed{I_1 = -7{,}5\ \text{mA}}$.

La résistance R_2 est traversée par I_0 (en convention récepteur), donc $\boxed{U_2 = R_2 I_0 = 10\ \text{V}}$.

Exercices d'entrainement

□ Exercice 5.7. Pont de Wheastone

1. On remarque que $U_{AC} = E = (R_1 + R_2) I_1$, donc $\boxed{I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}}$, de même $\boxed{I_3 = \frac{E}{R_3 + R_4}}$. La loi des nœuds en A donne $\boxed{I = I_1 + I_3 = E\left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}\right)}$.

Alors $U_1 = R_1 I_1$ (convention récepteur) soit $\boxed{U_1 = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}}$ et de même $\boxed{U_3 = R_3 I_3 = \frac{R_3 E}{R_3 + R_4}}$.

2. Les expressions de U_1 et U_3 sont immédiates avec le pont diviseur de tension. Alors d'après l'additivité des tensions : $\boxed{U = U_3 - U_1 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) E}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)}}$. U est nulle lorsque $\boxed{R_1 R_4 = R_2 R_3}$.

3. Quand l'ampèremètre indique zéro, c'est qu'il n'est traversé par aucun courant : <u>les intensités restent donc les mêmes</u> que dans le circuit précédent, donc les expressions des tensions aussi. De plus, l'ampèremètre étant équivalent à une résistance, <u>la tension U à ses bornes est nulle également</u> : c'est la situation étudiée à la question 2, qui donne $\boxed{R_1 R_4 = R_2 R_3}$.

4. On règle la valeur de la résistance variable R_1 de manière à obtenir $U = 0$ (contrôlé à l'aide d'un voltmètre ou d'un ampèremètre). On en déduit la valeur de la résistance inconnue R_3 : $\boxed{R_3 = \frac{R_1 R_4}{R_2}}$. Les valeurs de R_2 et R_4 étant connues à 1 % près, et R_1 pouvant être connue beaucoup plus précisément (si on utilise au moins quatre curseurs), on peut au mieux avoir <u>une précision de l'ordre de 2 %</u> pour R_3. En effet, l'incertitude relative sur R_3 s'écrit :

$$\frac{\Delta R_3}{R_3} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_4}{R_4}\right)^2}$$

. Or $\frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{\Delta R_4}{R_4} = 0{,}01$ et on peut avoir $\frac{\Delta R_1}{R_1} \ll 0{,}01$, donc on obtient $\frac{\Delta R_3}{R_3} = 0{,}02$ en arrondissant à un seul chiffre significatif par excès.

Pour pouvoir utiliser quatre curseurs, et avoir ainsi une précision sur R_1 inférieure à 0,1 %, on doit s'arranger pour que R_1 soit de l'ordre du kilohm. Or la résistance à mesurer R_3 est de l'ordre du dixième d'ohm, on a donc un rapport R_1/R_3 de l'ordre de 10^4. Il faut alors choisir R_4/R_2 de l'ordre de 10^{-4} : on prend $\boxed{R_4 = 100\ \Omega}$ et $\boxed{R_2 = 1{,}00\ \text{M}\Omega}$.

Exercice 5.8. Adaptation de puissance

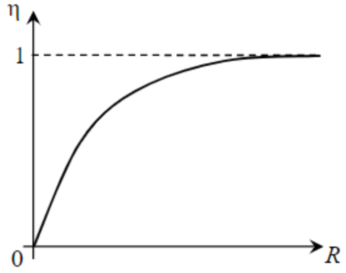
1. La résistance R reçoit la puissance $P = RI^2 = \dfrac{U^2}{R}$. Or d'après la formule du diviseur de tension : $U = \dfrac{R}{R+r}E$. On en déduit $\boxed{P = \dfrac{R}{(R+r)^2}E^2}$.

2. On calcule la dérivée de P en fonction de R, soit $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \dfrac{-E^2(R-r)}{(R+r)^3}$. P est extrémale lorsque sa dérivée s'annule, donc pour $\boxed{R = r}$. On a alors $\boxed{P = \dfrac{E^2}{2R}}$ qui correspond bien à un maximum car pour $R = 0$, $P = 0$.

3. $P_{\text{géné}} = EI$, et d'après la loi des mailles $E = (r+R)I$, d'où l'on tire $I = \dfrac{E}{R+r}$ et finalement $P_{\text{géné}} = \dfrac{E^2}{R+r}$.

Le rendement est donc : $\boxed{\eta = \dfrac{R}{R+r}}$.

Lorsque le montage est adapté, on obtient $\boxed{\eta = 0{,}5}$: la moitié de la puissance fournie par la FÉM est reçue par la résistance R (l'autre moitié étant « perdue » dans la résistance interne r du générateur).



Plus la résistance est grande et plus le rendement de transfert est important, mais si on prend le cas limite $R \to \infty$, le rendement est de 1 mais le courant est nul donc $P_{\text{géné}} = EI = 0$, le générateur ne fournit plus de puissance.

Exercice 5.9. Charge d'une batterie

1. On applique la loi des mailles $E - RI - rI - e = 0$, ce qui donne $\boxed{I = \dfrac{E-e}{R+r} = 2\ \text{A}}$.

On en déduit donc la tension $\boxed{U = e + rI = 12{,}4\ \text{V}}$. L'intensité et la tension sont définies en convention récepteur.

2. La puissance délivrée par la source vaut $\boxed{P_{\text{géné}} = EI = 26\ \text{W}}$, la puissance dissipée par effet Joule $\boxed{P_{\text{Joule}} = (r+R)I^2 = 2\ \text{W}}$ et la puissance « stockée » dans la FÉM de la batterie $\boxed{P_{\text{stock}} = eI = 24\ \text{W}}$. Le rendement est alors : $\eta = \dfrac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}} = \dfrac{P_{\text{stock}}}{P_{\text{géné}}}$ soit $\boxed{\eta = \dfrac{e}{E} = 92\ \%}$.

3. a) La capacité en ampères-heures est homogène à une charge électrique Q car le courant (en ampères) est une charge divisée un temps $\left(i = \dfrac{\delta q}{\mathrm{d}t}\right)$.

b) Au départ la batterie n'est qu'à 10 % de sa capacité, sa charge est donc $Q_0 = 5\ \text{A}\cdot\text{h}$. Il faut donc lui apporter une charge $Q = 45\ \text{A}\cdot\text{h} = I \cdot t$ avec t exprimé en heures, soit $\boxed{t = \dfrac{Q}{i} = 22{,}5\ \text{h}}$.

c) Énergie dissipée par effet Joule : $W_{\text{Joule}} = P_{\text{Joule}} \times t = 2 \times 22{,}5 \times 3600$ soit $\boxed{W_{\text{Joule}} = 160\ \text{kJ}}$.