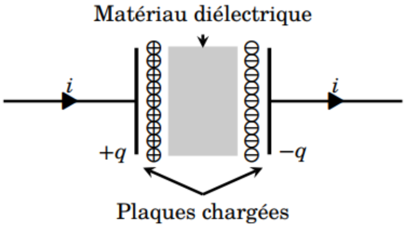
I] Dipôles utilisés en régime transitoire

1. Condensateur

a. Présentation



Un condensateur est composé de deux surfaces conductrices, appelées armatures, qui s'entourent ou se font face et sont séparées par un isolant (ou matériau diélectrique).

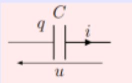
Les armatures portent des charges opposées $+q$ et $-q$, apportées par le courant qui parcourt la branche du condensateur, et qui s'accumulent.

b. Modèle du condensateur idéal ★

Savoir - Relation entre l'intensité du courant et la tension pour un condensateur et ordres de grandeur de capacités C

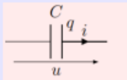
Un **condensateur** est caractérisé par sa **capacité** C qui est un scalaire positif s'exprimant en **farad** (F). L'armature du condensateur situé à la pointe de la flèche de la tension u porte la charge : $q = Cu$.

En convention récepteur



$$i = C\frac{du}{dt}$$

En convention générateur



$$i = -C\frac{du}{dt}$$

électronique	électrotechnique	en TP
10^{-12} F à 10^{-6} F	10^{-6} F à 1 F	1 nF à 1 μF

Savoir - Comportement d'un condensateur en régime permanent

En régime permanent, u ne dépend pas du temps, donc $i = C\frac{du}{dt} = 0$.
En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

c. Energie électromagnétique stockée dans un condensateur ★

Savoir - Exprimer l'énergie stockée par un condensateur

L'énergie électrique stockée dans un condensateur de capacité C et soumis à une tension u s'écrit :

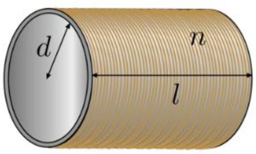
$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2}$$

Savoir - Interpréter la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

L'énergie étant une fonction nécessairement continue **la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité**, c'est une fonction continue du temps (au sens mathématique du terme).

2. Bobine

a. Présentation



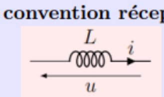
Une bobine est un enroulement de spires autour d'un axe. Une tension appliquée aux bornes d'un tel dipôle conduit par induction à une opposition aux variations du courant.

b. Modèle de la bobine idéale ★

Savoir - Savoir - Relation entre l'intensité du courant et la tension pour une bobine et ordres de grandeur d'inductances L

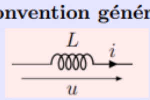
Une **bobine idéale** est caractérisée par son **inductance** $\boldsymbol{L}$, scalaire positif s'exprimant en **Henry (H)**.

En convention récepteur



$$u = L\frac{di}{dt}$$

En convention générateur



$$u = -L\frac{di}{dt}$$

1 m de câble TV	Haut-parleur	en TP
10^{-7} H à 10^{-3} H	10^{-6} H à 1 H	1 μH à 100 mH

Savoir - Comportement d'une bobine en régime permanent

En régime permanent i ne dépend pas du temps, donc $u = L\dfrac{di}{dt} = 0$. **En régime permanent, la bobine idéale est équivalente à un fil conducteur (ou à un interrupteur fermé).**

c. Energie électromagnétique stockée dans une bobine ★

Savoir - Exprimer la puissance reçue et l'´energie stockée par une bobine

- La **puissance reçue par une bobine idéale** en convention récepteur s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{P}_L = u \times i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}$$

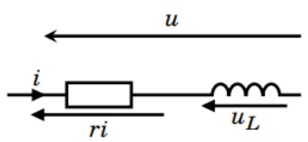
- **L'énergie magnétique stockée dans une bobine idéale** d'inductance L et traversée par un courant d'intensité i s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2}$$

Savoir - Interpréter la continuité du courant traversant une bobine

L'énergie étant une fonction nécessairement continue, **l'intensité du courant à travers une bobine ne peut pas subir de discontinuité**, c'est une fonction continue du temps (au sens mathématique du terme).

d. Modèle de la bobine réelle



Il est à noter qu'une bobine réelle a souvent une résistance interne qui n'est pas toujours négligeable (de l'ordre de 10 Ω).

On modélisera donc souvent les bobines réelles comme l'association série d'une bobine parfaite et d'une résistance. Ainsi, la loi de fonctionnement devient :

$$\boldsymbol{u = Ri + L\frac{di}{dt}}$$

II] Méthode pour l'étude des circuits linéaires du premier ordre

1. Vocabulaire

Régime transitoire : Régime qui intervient lors d'un changement brutal dans un circuit (fermeture d'un interrupteur…) : les tensions et intensités mettent un certain temps à s'établir et à atteindre un nouveau régime permanent.

Régime libre : Le circuit ne comporte aucun générateur. Les grandeurs électriques évoluent néanmoins au cours du temps. (Ex : un condensateur est chargé)

Régime forcé : Le circuit est soumis à une excitation extérieure (un générateur qui délivre un signal)

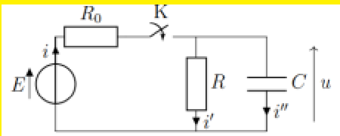
Réponse à échelon de tension : Le circuit fonctionne en régime forcé et la tension délivrée par le générateur est nulle jusqu'à l'instant initial choisi, puis constante à partir de cet instant.

2. Condition initiales

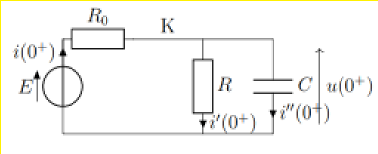
Savoir faire - Utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine

1. Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.
2. Utiliser la continuité de la charge du condensateur (ou de la tension aux bornes du condensateur) et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).
3. Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$.

Enoncé : On étudie le circuit ci-dessous, dans lequel, pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, aucun courant ne circule et le condensateur est déchargé.
Déterminer les expressions de i, i', i'' et u juste après la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire à $t = 0^+$.



Correction :



1. Pour $t < 0$ (et donc $t = 0^-$), le condensateur est déchargé, donc $u(0^-) = 0$, et aucun courant ne circule, donc $i(0^-) = i'(0^-) = i''(0^-) = 0$.
2. La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u(0^+) = u(0^-)$, donc $\boxed{u(0^+) = 0}$.

3. On en déduit d'après la loi d'Ohm : $\boxed{i'(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{R} = 0}$.
La loi de nœuds à $t = 0^+$ s'écrit $i(0^+) = i'(0^+) + i''(0^+)$, or $i'(0^+) = 0$, donc $i(0^+) = i''(0^+)$.
La loi des mailles à $t = 0^+$ s'écrit : $u(0^+) + R_0 i(0^+) - E = 0$, soit $\boxed{i(0^+) = i''(0^+) = \dfrac{E}{R}}$.

3. Etat final

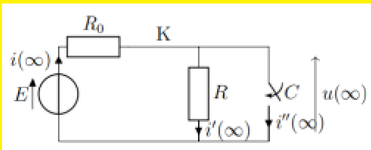
Savoir faire - Déterminer rapidement le régime permanent à l'aide des comportements asymptotiques du condensateur et de la bobine

Avant de réaliser de longs calculs (équations différentielles et résolutions), il est tout à fait possible de déterminer complètement l'état final du circuit, c'est-à-dire les tensions et intensités dans le circuit une fois le nouveau régime permanent atteint.

1. Reproduire le circuit électrique une fois le nouveau **régime permanent** atteint en remplaçant les **condensateurs par un interrupteur ouvert** et les **bobines par un fil**.
2. En déduire les tensions aux bornes des fils et les intensités à travers les interrupteurs ouverts qui sont nulles.
3. Appliquer les lois des nœuds, les lois des mailles et les relations intensité-tension pour déterminer les autres grandeurs électriques.

Enoncé : On considère à nouveau le circuit étudié précédemment. Déterminer les expressions de i, i', i'' et u une fois le régime permanent atteint.

Correction :



En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine est équivalente à un fil $\boxed{i''(\infty) = 0}$.

Les deux résistances sont en série, elles constituent donc un pont diviseur de tension, donc $\boxed{u(\infty) = \dfrac{R}{R + R_0}E}$

La loi des nœuds donne : $\boxed{i(\infty) = i'(\infty) = \dfrac{E}{R + R_0}}$.

4. Equation différentielle

Savoir faire - Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique s dans un circuit comportant une ou deux mailles

1. Lister les grandeurs électriques (tension, intensité) inconnues (qui ont dues être représentées sur le circuit précédemment). Le nombre de grandeurs électriques inconnues vous donne le nombre d'équations indépendantes à écrire.
2. Écrire toutes les relations indépendantes possibles :
— lois des mailles indépendantes (attention aux redondances) ;
— lois des nœuds (attention aux redondances) ;
— relations entre intensité et tension pour tous les dipôles.
3. Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur électrique qui nous intéresse.
4. La mettre sous forme canonique :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{s(\infty)}{\tau}$$

avec :
— s la grandeur électrique qui nous intéresse (une tension ou une intensité ou une charge) ;
— τ la constante de temps du circuit ;
— $s(\infty)$ la valeur qu'atteint s en régime permanent.

5. Résolution de l'équation différentielle

Savoir faire - Résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{B}{\tau}$$

1. Déterminer la **solution générale** y_H de l'**équation homogène (sans second membre)** :

$$\frac{dy_H}{dt} + \frac{y_H}{\tau} = 0 \Rightarrow \boxed{y_H(t) = Ke^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}}$$

avec $K \in \mathbb{R}$ une constante d'intégration.

2. Déterminer une **solution particulière** y_P , recherchée sous la forme du second membre, ici constant $\left(\frac{dy_P}{dt} = 0\right)$:

$$\frac{y_P}{\tau} = \frac{B}{\tau} \text{ soit } \boxed{y_P = B}$$

3. La **solution générale** est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$\boxed{y(t) = y_H(t) + y_P \Rightarrow y(t) = Ke^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} + B}$$

4. **Déterminer la constante d'intégration** K à l'aide de la condition initiale $y(t=0)$.

6. Lecture graphique de la constante de temps

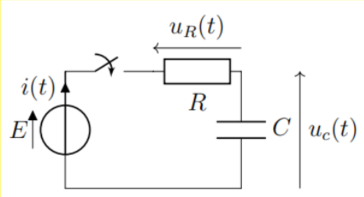
Savoir faire - Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire

1re méthode en utilisant la valeur de $u_c(\tau)$: τ est la durée au bout de laquelle, le régime transitoire a eu lieu à 63 %, autrement dit il en reste 37 %.
1. Déterminer la valeur de la tension finale $u_c(\infty)$ atteinte au bout d'un temps très long (resp. $u_c(0^+)$).
2. Calculer $0,63 \times u_c(\infty)$ (resp. $0,37 \times u_c(0^+)$).
3. Déterminer l'abscisse τ du point de la courbe $u_c(t)$ d'ordonnée $0,63 \times u_c(\infty)$ (resp. $0,37 \times u_c(0^+)$).

2^{e} méthode en utilisant la tangente à l'origine :
1. Tracer la tangente à l'origine à la courbe $u_c(t)$.
2. Tracer l'asymptote à la courbe $u_c(t)$ (valeur atteinte pour $t \to +\infty$).
3. L'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote est τ .

7. Exemple : Etude de la charge d'un condensateur ★

Enoncé : On étudie la charge d'un condensateur de capacité C à travers une résistance R par un générateur idéal de fem E. Le condensateur est initialement déchargé (pour $t < 0$). À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, et le générateur débite alors dans l'ensemble série $\{R - C\}$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur
2. L'écrire sous forme canonique

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{A}{\tau}$$

et identifier la constante de temps τ et la constante A.
3. Déterminer les solutions générales de l'équation différentielle
4. Que vaut $u_c(0^-)$ (juste avant la fermeture de l'interrupteur) ? Quelle propriété particulière possède la tension aux bornes d'un condensateur ? En déduire $u_c(0^+)$
5. Déterminer la constante d'intégration et en déduire l'expression de $u_c(t)$

Correction :
1. Dans le circuit tracé précédemment, il y a 3 inconnues : $i(t)$, $u_c(t)$ et $u_R(t)$. Il faut donc 3 équations indépendantes pour résoudre le problème.
— Loi des mailles : $u_c(t) + u_R(t) - E = 0$ (1)
— Loi d'Ohm : $u_R(t) = Ri(t)$ (2)
— Relation du condensateur : $i(t) = C\frac{du_c}{dt}$ (3)
On cherche à obtenir l'équation différentielle vérifiée par u_c, il faut donc tout exprimer en fonction de u_c. On injecte (3) dans (2) puis dans (1) :

$$\boxed{u_c(t) + RC\frac{du_c}{dt} = E}$$

2. Pour la mettre sous forme canonique il faut diviser par RC pour qu'il y ait un facteur 1 devant la dérivée de plus haut ordre (la dérivée 1$^{\text{re}}$ ici) et placer tout ce qui dépend de la fonction $u_c(t)$ inconnue à gauche de l'égalité, le reste à droite :

$$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{E}{RC}}$$

On identifie alors la constante de temps du circuit RC série : $\boxed{\tau = RC}$.
3. — Solution de l'équation homogène (sans second membre) :

$$\frac{du_{c,H}}{dt} + \frac{u_{c,H}}{\tau} = 0 \quad \text{donc :} \quad \boxed{u_{c,H}(t) = Ke^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}}$$

— Solution particulière de l'équation différentielle (avec second membre) recherchée sous la forme du second membre, c'est-à-dire sous la forme d'une constante, ici $u_{c,P} = \text{Cste}$, qui vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{du_{c,P}}{dt} + \frac{u_{c,P}}{\tau} = \frac{E}{\tau}\text{ , soit avec }\frac{du_{c,P}}{dt} = 0\text{ , on en déduit }\boxed{u_{c,P} = E}$$

— Solution générale de l'équation différentielle :

$$\boxed{u_c(t) = Ke^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + E}$$

4. Le condensateur est initialement déchargé, donc $\boxed{u_c(0^-) = 0}$.
La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité : $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-)}$.
On en déduit que $\boxed{u_c(0^+) = 0}$.
5. On détermine la constante d'intégration à l'aide de la condition initiale $u_c(0^+) = 0$: $u_c(0) = K + E$, donc $K = -E$. Ainsi :

$$\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right)}$$

IV] Aspect énergétique ★

Savoir faire - Réaliser un bilan de puissance et d'énergie

1. Écrire la loi des mailles.
2. Multiplier l'équation obtenue par l'intensité i du courant dans le circuit.
3. Identifier chaque terme de la relation obtenue en terme de puissance algébriquement fournie (dipôles en convention générateur) ou algébriquement reçue (dipôles en convention récepteur), donner leur interprétation et vérifier la conservation de la puissance, donc de l'énergie.
4. Intégrer par rapport au temps pour obtenir un bilan énergétique.

Énoncé : On s'intéresse au bilan énergétique de la charge d'un condensateur dans un circuit RC.
1. En suivant la méthode précédente, établir le bilan de puissance de la charge du condensateur que l'on mettra sous la forme : $\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_C$. On précisera l'expression et la signification des différents termes.
2. Exprimer l'énergie fournie par le générateur au circuit sur toute la durée du régime transitoire. Pour le calcul de l'intégrale on pourra utiliser le fait que $i = C\dfrac{du_c}{dt}$.
3. Exprimer l'énergie initialement stockée dans le condensateur, et l'énergie stockée dans le condensateur à la fin du régime transitoire.
4. En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.
On s'intéresse à présent au bilan énergétique de la décharge d'un condensateur.
5. Exprimer l'énergie initialement stockée par le condensateur, et l'énergie stockée à la fin du régime transitoire. Qu'est devenue cette énergie ?

Correction :
1. Repartons de la loi des mailles : $E = u_R + u_c$ et multiplions-la par i : $E.i = Ri^2 + u_c \times i$, avec :
• $E.i$: puissance algébriquement fournie par le générateur (en convention générateur) .
$u_c(t)$ est croissant $\forall t$ donc sa dérivée, et donc $i(t)$ est positive $\forall t$, $E.i(t) > 0$: le générateur fournit à chaque instant de la puissance électrique au reste du circuit.
• Ri^2 : puissance reçue algébriquement par le conducteur ohmique (en convention récepteur) Cette puissance est toujours positive, donc le conducteur ohmique reçoit réellement à chaque instant de la puissance électrique, puissance qui est entièrement dissipée par effet Joule (sous forme de chaleur).
• $u_c \times i$: puissance reçue algébriquement par le condensateur (en convention récepteur).
Avec la relation du condensateur, on peut écrire $\mathcal{P}_C = u_c \times C\dfrac{du_c}{dt} = C\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}u_c^2\right)$, on reconnait ici l'énergie emmagasinée par le condensateur.
Au cours de la charge $u_c > 0$ et u_c augmente, donc u_c^2 augmente également. La puissance algébriquement reçue par le condensateur est positive à chaque instant : le condensateur reçoit réellement de la puissance électrique à chaque instant.
2. Énergie fournie par le générateur :

$$\begin{aligned}\boxed{\mathcal{E}_{G,\text{fournie}}} &= \int_0^{\infty} \mathcal{P}_G dt\\ &= \int_0^{\infty} E.i(t)dt\\ &= \int_0^{\infty} E.C\frac{du_c}{dt}dt\\ &= E.C[u_c(t)]_0^{\infty}\\ &= E.C(E-0)\\ &= \boxed{CE^2}\end{aligned}$$

3. Énergie stockée par le condensateur dans l'état initial et à la fin du régime transitoire :

$$\begin{aligned}\boxed{\mathcal{E}_C(0)} &= \frac{1}{2}Cu_c^2(0)\\ &= \boxed{0}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\boxed{\mathcal{E}_C(\infty)} &= \frac{1}{2}Cu_c^2(\infty)\\ &= \boxed{\frac{1}{2}CE^2}\end{aligned}$$

4. Le générateur a fournie CE^2 , la moitié est récupérée par le condensateur. L'énergie se conserve, donc la moitié de l'énergie fournie est reçue par la résistance qu'elle dissipe par effet Joule, soit : $\boxed{\mathcal{E}_{\text{Joule}} = \frac{1}{2}CE^2}$
5. Énergie stockée par le condensateur dans l'état initial et à la fin du régime transitoire :

$$\begin{aligned}\boxed{\mathcal{E}_C(0)} &= \frac{1}{2}Cu_c^2(0)\\ &= \boxed{\frac{1}{2}CE^2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\boxed{\mathcal{E}_C(\infty)} &= \frac{1}{2}Cu_c^2(\infty)\\ &= \boxed{0}\end{aligned}$$

L'énergie se conserve, donc l'énergie perdue par le condensateur est reçue par la résistance et dissipée par effet Joule, soit $\boxed{\mathcal{E}_{\text{Joule}}} = \mathcal{E}_C(0) - \mathcal{E}_C(\infty) = \boxed{\frac{1}{2}CE^2}$.