Chapitre 4 - Circuits linéaires du premier ordre

Table des matières

Guide de révision de chapitre 4	
Avant le TD	Savoir et Savoir faire du chapitre 4 + exercices du cours
Avant la khôlle	Savoir et Savoir faire du chapitre 4 + exercices du cours + TD : ex 1, 2, 3, 4
Avant le DS	Savoir et Savoir faire du chapitre 4 + exercices du cours + TD : ex 5, 6, 7

Introduction

De nombreuses applications nécessitent l'utilisation d'un circuit électrique contenant un condensateur et une (ou plusieurs) résistances. Par exemple, le flash d'un appareil photo s'allume lors de la décharge très rapide d'un condensateur. De même, un défibrillateur automatisé externe utilise la décharge d'un condensateur permettant de délivrer un courant électrique dans le corps de la victime entre les deux électrodes.

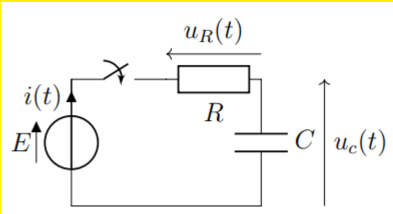
I. Charge et décharge du condensateur

Cette partie est une révision de ce que vous avez déjà étudié en terminale. Les « Savoir faire » nécessaires pour rédiger convenablement les différentes questions se trouvent dans la suite du polycopié (les § correspondants sont indiqués). Les méthodes revues ici seront ensuite mises en œuvre dans des situations nouvelles.

1. Étude de la charge d'un condensateur

Exercice 1

Enoncé : On étudie la charge d'un condensateur de capacité C à travers une résistance R par un générateur idéal de fem E. Le condensateur est initialement déchargé (pour $t < 0$). À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, et le générateur débite alors dans l'ensemble série $\{R - C\}$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur (voir § II.4)
2. L'écrire sous forme canonique (voir § II.4) :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{A}{\tau}$$

et identifier la constante de temps τ et la constante A.
3. Déterminer les solutions générales de l'équation différentielle (voir § II.5) .
4. Que vaut $u_c(0^-)$ (juste avant la fermeture de l'interrupteur) ? Quelle propriété particulière possède la tension aux bornes d'un condensateur ? En déduire $u_c(0^+)$(voir § II.2) .
5. Déterminer la constante d'intégration et en déduire l'expression de $u_c(t)$ (voir § II.5) .

Correction :
1. Dans le circuit tracé précédemment, il y a 3 inconnues : $i(t)$, $u_c(t)$ et $u_R(t)$. Il faut donc 3 équations indépendantes pour résoudre le problème.
— Loi des mailles : $u_c(t) + u_R(t) - E = 0$ (1)
— Loi d'Ohm : $u_R(t) = Ri(t)$ (2)
— Relation du condensateur : $i(t) = C\frac{du_c}{dt}$ (3)
On cherche à obtenir l'équation différentielle vérifiée par u_c, il faut donc tout exprimer en fonction de u_c. On injecte (3) dans (2) puis dans (1) :

$$\boxed{u_c(t) + RC\frac{du_c}{dt} = E}$$

2. Pour la mettre sous forme canonique il faut diviser par RC pour qu'il y ait un facteur 1 devant la dérivée de plus haut ordre (la dérivée 1$^{\text{re}}$ ici) et placer tout ce qui dépend de la fonction $u_c(t)$ inconnue à gauche de l'égalité, le reste à droite :

$$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{E}{RC}}$$

On identifie alors la constante de temps du circuit RC série : $\boxed{\tau = RC}$.
3. — Solution de l'équation homogène (sans second membre) :

$$\frac{du_{c,H}}{dt} + \frac{u_{c,H}}{\tau} = 0 \quad \text{donc :} \quad \boxed{u_{c,H}(t) = Ke^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}}$$

— Solution particulière de l'équation différentielle (avec second membre) recherchée sous la forme du second membre, c'est-à-dire sous la forme d'une constante, ici $u_{c,P} = \text{Cste}$, qui vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{du_{c,P}}{dt} + \frac{u_{c,P}}{\tau} = \frac{E}{\tau} \text{ , soit avec } \frac{du_{c,P}}{dt} = 0 \text{ , on en déduit } \boxed{u_{c,P} = E}$$

— Solution générale de l'équation différentielle :

$$\boxed{u_c(t) = Ke^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + E}$$

4. Le condensateur est initialement déchargé, donc $\boxed{u_c(0^-) = 0}$.

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité : $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-)}$.

On en déduit que $\boxed{u_c(0^+) = 0}$.

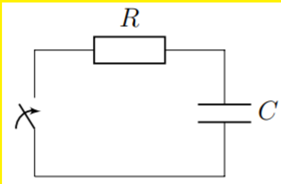
5. On détermine la constante d'intégration à l'aide de la condition initiale $u_c(0^+) = 0$: $u_c(0) = K + E$, donc $K = -E$. Ainsi :

$$\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right)}$$

2. Étude de la décharge d'un condensateur

Exercice 2

Enoncé : On étudie la décharge d'un condensateur de capacité C dans une résistance R. Le condensateur a été préalablement chargé sous une tension U_0. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On parle ici de **régime libre**, car il n'y a pas de source de tension dans le circuit.

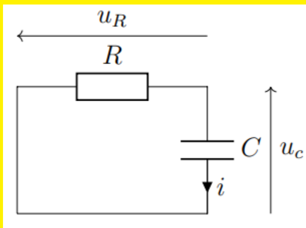


1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur (voir § II.4)
L'écrire sous forme canonique :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = 0$$

et identifier la constante de temps τ .
2. Déterminer les solutions générales de l'équation différentielle (voir § II.5) .
3. Que vaut $u_c(0^-)$ (juste avant la fermeture de l'interrupteur) ? Quelle propriété particulière possède la tension aux bornes d'un condensateur ? En déduire $u_c(0^+)$(voir § II.2) .
4. Déterminer la constante d'intégration et en déduire l'expression de $u_c(t)$ (voir § II.5) .

Correction :



1. — Loi des mailles : $u_c(t) + u_R(t) = 0$
— Loi d'Ohm : $u_R(t) = Ri(t)$
— Relation du condensateur : $i(t) = C\dfrac{du_c}{dt}$
En combinant, on obtient :

$$\boxed{u_c(t) + RC\frac{du_c}{dt} = 0} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c(t) = 0}$$

On identifie alors la constante de temps du circuit RC série : $\boxed{\tau = RC}$.
2. Solution générale de l'équation différentielle :

$$\boxed{u_c(t) = Ke^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}}$$

3. Le condensateur est initialement chargé sous la tension U_0, donc $\boxed{u_c(0^-) = U_0}$.

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité : $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-)}$.

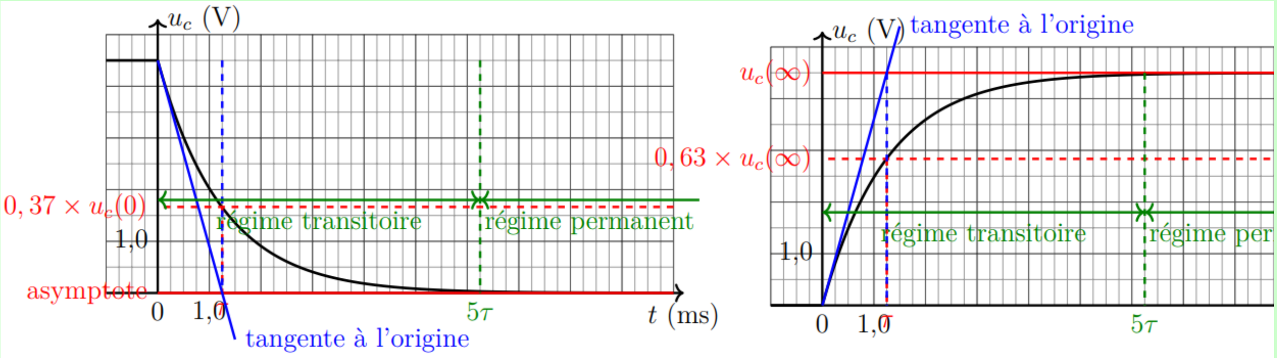
On en déduit que $\boxed{u_c(0^+) = U_0}$.

4. $u_c(0^+) = K = U_0$. Ainsi : $\boxed{u_c(t) = U_0 e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}}$

3. Étude graphique

Savoir faire - Exercice 3
Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent

Enoncé : On donne deux évolutions de la tension aux bornes du condensateur au cours du temps



1. Identifier la courbe correspondant à la charge du condensateur, et celle correspondant à la décharge.
2. Identifier sur chaque courbe le régime transitoire et le régime permanent final.
3. Déterminer graphiquement le temps caractéristique du circuit (voir § II.6).

Correction :
1. Sur la courbe de gauche, u_c diminue au cours du temps pour tendre vers 0, c'est la décharge du condensateur. La courbe de droite correspond à la charge du condensateur : u_c est initialement nulle, puis à la fin elle présente une valeur non nulle.
2. Voir courbe complétée.
3. On lit $\boxed{\tau = 1,25\ ms}$

II. Généralisation : méthodes pour l'étude des circuits linéaires du premier ordre

1. Pour commencer

. <u>**Définitions**</u>

Savoir - Régime transitoire, réponse à un échellon de tension, régime libre

• Lorsqu'un changement brutal intervient dans un circuit (fermeture d'un interrupteur par ex.), les tensions et intensités mettent un certain temps à s'établir et à atteindre un nouveau régime permanent : c'est le **régime transitoire**, au cours duquel les tensions et intensités évoluent dans le temps entre un premier régime permanent et le nouveau régime permanent. Il existe deux types de régimes transitoires.
• **Réponse à un échelon de tension** : le circuit comporte une source de tension de f.é.m. nulle jusqu'à l'instant initial choisi, puis constante à partir de cet instant. Cela correspond en pratique à l'allumage d'un générateur de tension constante, ou à la fermeture d'un interrupteur.
• **Régime libre** : le circuit ne comporte aucun générateur. Les grandeurs électriques évoluent néanmoins au cours du temps si, à un instant initial, un condensateur est chargé (par ex.).

. <u>**Début d'une étude d'un circuit**</u>

Tout exercice d'électricité DOIT COMMENCER par :

✓ **la représentation du schéma du circuit étudié** ;
✓ **l'indication** sur le circuit de **toutes les intensités** (une par branche) et **tensions** (une aux bornes de chaque dipôle) : **flèche et nom** .

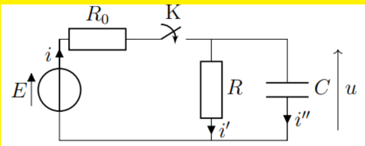
2. Conditions initiales

Savoir faire - Utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine

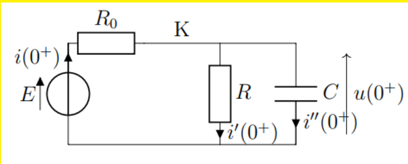
1. Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.
2. Utiliser la continuité de la charge du condensateur (ou de la tension aux bornes du condensateur) et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).
3. Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$.

Exercice 4

Enoncé : On étudie le circuit ci-dessous, dans lequel, pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, aucun courant ne circule et le condensateur est déchargé.
Déterminer les expressions de i, i', i'' et u juste après la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire à $t = 0^+$.



Correction :



1. Pour $t < 0$ (et donc $t = 0^-$), le condensateur est déchargé, donc $u(0^-) = 0$, et aucun courant ne circule, donc $i(0^-) = i'(0^-) = i''(0^-) = 0$.
2. La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u(0^+) = u(0^-)$, donc $\boxed{u(0^+) = 0}$.

3. On en déduit d'après la loi d'Ohm : $\boxed{i'(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{R} = 0}$.
La loi de nœuds à $t = 0^+$ s'écrit $i(0^+) = i'(0^+) + i''(0^+)$, or $i'(0^+) = 0$, donc $i(0^+) = i''(0^+)$.
La loi des mailles à $t = 0^+$ s'écrit : $u(0^+) + R_0 i(0^+) - E = 0$, soit $\boxed{i(0^+) = i''(0^+) = \dfrac{E}{R}}$.

3. État final

Savoir faire - Déterminer rapidement le régime permanent à l'aide des comportements asymptotiques du condensateur et de la bobine

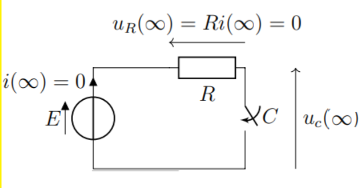
Avant de réaliser de longs calculs (équations différentielles et résolutions), il est tout à fait possible de déterminer complètement l'état final du circuit, c'est-à-dire les tensions et intensités dans le circuit une fois le nouveau régime permanent atteint.

1. Reproduire le circuit électrique une fois le nouveau **régime permanent** atteint en remplaçant les **condensateurs par un interrupteur ouvert** et les **bobines par un fil**.
2. En déduire les tensions aux bornes des fils et les intensités à travers les interrupteurs ouverts qui sont nulles.
3. Appliquer les lois des nœuds, les lois des mailles et les relations intensité-tension pour déterminer les autres grandeurs électriques.

Exercice 5

Enoncé : Déterminer l'état final du circuit (en régime permanent) lors de la charge du condensateur dans un circuit RC, sans utiliser les calculs effectués dans l'ex 1.

Correction :



En régime permanent, u_c ne dépend pas du temps , donc $i(t) = C\dfrac{du_c}{dt} = 0$, donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $\boxed{i(\infty) = 0}$.

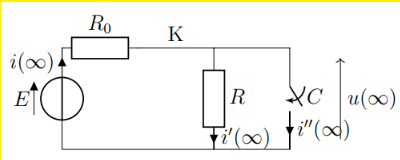
Pour déterminer l'état final du circuit, il faut représenter le circuit, en remplaçant le condensateur par un interrupteur ouvert.

En régime permanent, la loi des mailles s'écrit alors $u_c(\infty) - E = 0$, donc $\boxed{u_c(\infty) = E}$.

Exercice 6

Enoncé : On considère à nouveau le circuit étudié dans l'ex 4. Déterminer les expressions de i, i', i'' et u une fois le régime permanent atteint.

Correction :



En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine est équivalente à un fil $\boxed{i''(\infty) = 0}$.

Les deux résistances sont en série, elles constituent donc un pont diviseur de tension, donc $\boxed{u(\infty) = \dfrac{R}{R + R_0}E}$

La loi des nœuds donne : $\boxed{i(\infty) = i'(\infty) = \dfrac{E}{R + R_0}}$.

4. Établir l'équation différentielle

Savoir faire - Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique s dans un circuit comportant une ou deux mailles

1. Lister les grandeurs électriques (tension, intensité) inconnues (qui ont dues être représentées sur le circuit précédemment). Le nombre de grandeurs électriques inconnues vous donne le nombre d'équations indépendantes à écrire.
2. Écrire toutes les relations indépendantes possibles :
— lois des mailles indépendantes (attention aux redondances) ;
— lois des nœuds (attention aux redondances) ;
— relations entre intensité et tension pour tous les dipôles.
3. Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur électrique qui nous intéresse.
4. La mettre sous forme canonique :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{s(\infty)}{\tau}$$

avec :
— s la grandeur électrique qui nous intéresse (une tension ou une intensité ou une charge) ;
— τ la constante de temps du circuit ;
— $s(\infty)$ la valeur qu'atteint s en régime permanent.

5. Résoudre l'équation différentielle

Savoir faire - Résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{B}{\tau}}$$

1. Déterminer la **solution générale** y_H de l'**équation homogène (sans second membre)** :

$$\frac{dy_H}{dt} + \frac{y_H}{\tau} = 0 \Rightarrow \boxed{y_H(t) = Ke^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}}$$

avec $K \in \mathbb{R}$ une constante d'intégration.
2. Déterminer une **solution particulière** y_P , recherchée sous la forme du second membre, ici constant $\left(\frac{dy_P}{dt} = 0\right)$:

$$\frac{y_P}{\tau} = \frac{B}{\tau} \text{ soit } \boxed{y_P = B}$$

3. La **solution générale** est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$\boxed{y(t) = y_H(t) + y_P \Rightarrow y(t) = Ke^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} + B}$$

4. **Déterminer la constante d'intégration** K à l'aide de la condition initiale $y(t = 0)$.

6. Lire graphiquement la constante de temps

Savoir faire - Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire

<u>1^{re} méthode en utilisant la valeur de $u_c(\tau)$</u> : τ est la durée au bout de laquelle, le régime transitoire a eu lieu à 63 %, autrement dit il en reste 37 %.
1. Déterminer la valeur de la tension finale $u_c(\infty)$ atteinte au bout d'un temps très long (resp. $u_c(0^+)$).
2. Calculer $0,63 \times u_c(\infty)$ (resp. $0,37 \times u_c(0^+)$).
3. Déterminer l'abscisse τ du point de la courbe $u_c(t)$ d'ordonnée $0,63 \times u_c(\infty)$ (resp. $0,37 \times u_c(0^+)$).

<u>2^e méthode en utilisant la tangente à l'origine</u> :
1. Tracer la tangente à l'origine à la courbe $u_c(t)$.
2. Tracer l'asymptote à la courbe $u_c(t)$ (valeur atteinte pour $t \to +\infty$).
3. L'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote est τ .

III. Aspect énergétique

Savoir faire - Réaliser un bilan de puissance et d'énergie

1. Écrire la loi des mailles.
2. Multiplier l'équation obtenue par l'intensité i du courant dans le circuit.
3. Identifier chaque terme de la relation obtenue en terme de puissance algébriquement fournie (dipôles en convention générateur) ou algébriquement reçue (dipôles en convention récepteur), donner leur interprétation et vérifier la conservation de la puissance, donc de l'énergie.
4. Intégrer par rapport au temps pour obtenir un bilan énergétique.

Exercice 7

Énoncé : On s'intéresse au bilan énergétique de la charge d'un condensateur dans un circuit RC.

1. En suivant la méthode précédente, établir le bilan de puissance de la charge du condensateur que l'on mettra sous la forme : $\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_C$. On précisera l'expression et la signification des différents termes.

2. Exprimer l'énergie fournie par le générateur au circuit sur toute la durée du régime transitoire. Pour le calcul de l'intégrale on pourra utiliser le fait que $i = C\dfrac{du_c}{dt}$.

3. Exprimer l'énergie initialement stockée dans le condensateur, et l'énergie stockée dans le condensateur à la fin du régime transitoire.

4. En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.

On s'intéresse à présent au bilan énergétique de la décharge d'un condensateur.

5. Exprimer l'énergie initialement stockée par le condensateur, et l'énergie stockée à la fin du régime transitoire. Qu'est devenue cette énergie ?

Correction :

1. Repartons de la loi des mailles : $E = u_R + u_c$ et multiplions-la par i : $E.i = Ri^2 + u_c \times i$, avec :

• $E.i$: puissance algébriquement fournie par le générateur (en convention générateur) .
$u_c(t)$ est croissant $\forall t$ donc sa dérivée, et donc $i(t)$ est positive $\forall t$, $E.i(t) > 0$: le générateur fournit à chaque instant de la puissance électrique au reste du circuit.

• Ri^2 : puissance reçue algébriquement par le conducteur ohmique (en convention récepteur) Cette puissance est toujours positive, donc le conducteur ohmique reçoit réellement à chaque instant de la puissance électrique, puissance qui est entièrement dissipée par effet Joule (sous forme de chaleur).

• $u_c \times i$: puissance reçue algébriquement par le condensateur (en convention récepteur).

Avec la relation du condensateur, on peut écrire $\mathcal{P}_C = u_c \times C\dfrac{du_c}{dt} = C\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}u_c^2\right)$, on reconnait ici l'énergie emmagasinée par le condensateur.

Au cours de la charge $u_c > 0$ et u_c augmente, donc u_c^2 augmente également. La puissance algébriquement reçue par le condensateur est positive à chaque instant : le condensateur reçoit réellement de la puissance électrique à chaque instant.

2. Énergie fournie par le générateur :

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathcal{E}_{\text{G,fournie}}} &= \int_0^\infty \mathcal{P}_G dt \\
&= \int_0^\infty E.i(t)dt \\
&= \int_0^\infty E.C\frac{du_c}{dt}dt \\
&= E.C[u_c(t)]_0^\infty \\
&= E.C(E-0) \\
&= \boxed{CE^2}
\end{aligned}$$

3. Énergie stockée par le condensateur dans l'état initial et à la fin du régime transitoire :

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathcal{E}_{\text{C}}(0)} &= \frac{1}{2}Cu_c^2(0) \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\boxed{\mathcal{E}_{\text{C}}(\infty)} &= \frac{1}{2}Cu_c^2(\infty) \\
&= \boxed{\frac{1}{2}CE^2}
\end{aligned}$$

4. Le générateur a fournie CE^2 , la moitié est récupérée par le condensateur. L'énergie se conserve, donc la moitié de l'énergie fournie est reçue par la résistance qu'elle dissipe par effet Joule, soit : $\boxed{\mathcal{E}_{\text{Joule}} = \frac{1}{2}CE^2}$

5. Énergie stockée par le condensateur dans l'état initial et à la fin du régime transitoire :

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathcal{E}_{\text{C}}(0)} &= \frac{1}{2}Cu_c^2(0) \\
&= \boxed{\frac{1}{2}CE^2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\boxed{\mathcal{E}_{\text{C}}(\infty)} &= \frac{1}{2}Cu_c^2(\infty) \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

L'énergie se conserve, donc l'énergie perdue par le condensateur est reçue par la résistance et dissipée par effet Joule, soit $\boxed{\mathcal{E}_{\text{Joule}}} = \mathcal{E}_{\text{C}}(0) - \mathcal{E}_{\text{C}}(\infty) = \boxed{\frac{1}{2}CE^2}$.

IV. Résolution approchée des équations différentielles par la méthode d'Euler

On souhaite déterminer la réponse du circuit RC à une excitation de forme quelconque, qui répond à l'équation différentielle sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$:

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{u_c}{\tau} + \frac{e(t)}{\tau}$$

où e est une fonction du temps.
Au cours de la charge du condensateur, $e(t) = E$, une constante pour $t > 0$. Au cours de la décharge, $e(t) = 0$.
e peut dépendre également du temps (fonction créneau, ou sinusoïdale,...) .

La méthode d'Euler est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles du premier ordre.

On découpe l'intervalle $[t_0, t_f]$ de résolution, en n intervalles de largeur $h = \dfrac{t_f - t_0}{n}$.
La valeur approchée de la solution est déterminée en $(n+1)$ instants, qui s'écrivent $t_i = t_0 + i \times h = t_0 + i \times \dfrac{t_f - t_0}{n}$ (pour $i \in [\![0, n]\!]$).

Les valeurs approchées de u_c se déterminent de proche en proche en partant de l'instant initial.
— Partons de l'instant initial t_0 où on connait la tension $u_c(t_0)$ (c'est la condition initiale) : le nombre dérivé à l'instant t_0, noté $\dfrac{du_c}{dt}(t_0)$, s'exprime, d'après l'équation différentielle, selon :

$$\frac{du_c}{dt}(t_0) = -\frac{u_c(t_0)}{\tau} + \frac{e(t_0)}{\tau}$$

$\dfrac{du_c}{dt}(t_0)$ correspond à la **pente de la tangente à la courbe à l'instant $\boldsymbol{t_0}$**. Ce nombre dérivé est connu à t_0 puisque $u_c(t_0)$ est connu (CI) et $e(t_0)$ est connu (on connait ce que fournit le générateur au circuit).
L'idée de la méthode d'Euler est d'**approximer sur l'intervalle $[\boldsymbol{t_0, t_1}]$ la fonction u_c par sa tangente à $\boldsymbol{t_0}$**. Connaissant la valeur de la pente et le point $(t_0, u_c(t_0))$ de cette tangente, on peut déterminer la valeur de $u_c(t_1)$ (équation d'une droite) :

$$\begin{aligned}
u_c(t_1) &\simeq u_c(t_0) + pente_0 \times (t_1 - t_0) \\
u_c(t_1) &\simeq u_c(t_0) + \frac{du_c}{dt}(t_0) \times h \\
u_c(t_1) &\simeq u_c(t_0) + \left(-\frac{u_c(t_0)}{\tau} + \frac{e(t_0)}{\tau}\right) \times h \\
u_c(t_1) &\simeq u_c(t_0) + \frac{e(t_0) - u_c(t_0)}{\tau} \times h
\end{aligned}$$

— On connait maintenant $u_c(t_1)$ à l'instant t_1 .
Le nombre dérivé à l'instant t_1, noté $\dfrac{du_c}{dt}(t_1)$, s'exprime, d'après l'équation différentielle, selon :

$$\frac{du_c}{dt}(t_1) = -\frac{u_c(t_1)}{\tau} + \frac{e(t_1)}{\tau}$$

$\dfrac{du_c}{dt}(t_1)$ correspond à la **pente de la tangente à la courbe à l'instant $\boldsymbol{t_1}$**. Ce nombre dérivé est connu à t_1 puisque $u_c(t_1)$ est connu (étape précédente) et $e(t_1)$ est connu (on connait ce que fournit le générateur au circuit). L'idée de la méthode d'Euler est d'**approximer sur l'intervalle $[\boldsymbol{t_1, t_2}]$ la fonction u_c par sa tangente à $\boldsymbol{t_1}$**. Connaissant la valeur de la pente et le point $(t_1, u_c(t_1))$ de cette tangente, on peut déterminer la valeur de $u_c(t_2)$ (équation d'une droite) :

$$\begin{aligned}
u_c(t_2) &\simeq u_c(t_1) + pente_1 \times (t_2 - t_1) \\
u_c(t_2) &\simeq u_c(t_1) + \frac{du_c}{dt}(t_1) \times h \\
u_c(t_2) &\simeq u_c(t_1) + \left(-\frac{u_c(t_1)}{\tau} + \frac{e(t_1)}{\tau}\right) \times h \\
u_c(t_2) &\simeq u_c(t_1) + \frac{e(t_1) - u_c(t_1)}{\tau} \times h
\end{aligned}$$

— Et ainsi de suite...
— On connait maintenant $u_c(t_i)$ à l'instant t_i .
Le nombre dérivé à l'instant t_i s'exprime selon :

$$\frac{du_c}{dt}(t_i) = -\frac{u_c(t_i)}{\tau} + \frac{e(t_i)}{\tau}$$

$\frac{du_c}{dt}(t_i)$ correspond à la **pente de la tangente à la courbe à l'instant t_i**. Ce nombre dérivé est connu à t_i puisque $u_c(t_i)$ est connu (étape précédente) et $e(t_i)$ est connu (on connait ce que fournit le générateur au circuit). L'idée de la méthode d'Euler est d'**approximer sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ la fonction u_c par sa tangente à t_i**. Connaissant la valeur de la pente et le point $(t_i, u_c(t_i))$ de cette tangente, on peut déterminer la valeur de $u_c(t_{i+1})$ (équation d'une droite) :

$$u_c(t_{i+1}) \simeq u_c(t_i) + pente_i \times (t_{i+1} - t_i)$$
$$u_c(t_{i+1}) \simeq u_c(t_i) + \frac{du_c}{dt}(t_i) \times h$$
$$u_c(t_{i+1}) \simeq u_c(t_i) + \left(-\frac{u_c(t_i)}{\tau} + \frac{e(t_i)}{\tau}\right) \times h$$
$$u_c(t_{i+1}) \simeq u_c(t_i) + \frac{e(t_i) - u_c(t_i)}{\tau} \times h$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad , \quad u_c(t_{i+1}) \simeq u_c(t_i) + \frac{e(t_i) - u_c(t_i)}{\tau} \times h}$$

Cette relation de récurrence permet de déterminer successivement les valeurs approchées de u_c connaissant la tension e imposée à chaque instant par le générateur, et la valeur de u_c à $t = 0$.

Savoir faire - Exercice 9
Mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque

Énoncé :
1. Compléter le code ci-dessous concernant la charge d'un condensateur :

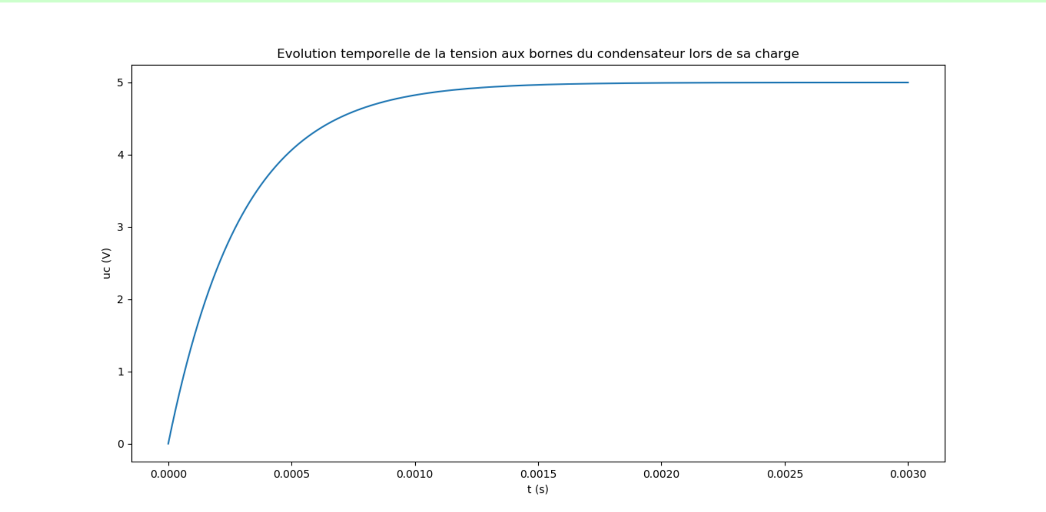
```
import matplotlib . pyplot as plt # pour le tracé graphique

## paramètres du circuit
R = 10**3 # Ohm
C = 3*10** -7 # F
tau = R * C # constante de temps

## paramètres de résolution
t0 = 0 # instant initial
tf = 10* tau # résolution sur  l intervalle  [0 ,10* RC]
n = 1000 # nombre  d intervalles
h =             #à compléter : pas de calcul , largeur des intervalles

## Utilisation de  l algorithme   d Euler  pour  l  étude de la charge du condensateur
e = 5 # Volt (Si E=5V)
liste_t =[ t0 ] # initialisation de la liste des instants
u =                     # à compléter : initialisation avec la CI de la variable u qui contiendra les valeurs successives de la tension
liste_u =                     # à compléter : initialisation de la liste des tensions avec la CI

for i in range (1 , n +1) :#n instants à déterminer ( pour i allant de 1 à n+1)
    liste_t . append (                  ) # à compléter : ajout de  l instant  ti à la liste des instants
    u =                       # à compléter : calcul de la valeur suivante de u à partir de la relation de récurrence
    liste_u                                # à compléter : ajout u à la liste des tensions

## Tracé de u en fonction de t
plt . plot ( liste_t , liste_u ) # tracé des valeurs de liste_u en foncion des valeurs de liste_t
plt . xlabel ("t (s)") # nom de  l axe  des abscisse
plt . ylabel ("uc (V)") # nom de  l axe  des ordonnées
plt . title (" Evolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge ")
plt . show () # affiche le graphe
```

2. Que faut-il modifier pour le résoudre dans le cas de la décharge du condensateur ?

Correction :
2. Il faut changer la condition initiale sur $u_c(0) = 5\ V$ et $e = 0$.

1.

```
import matplotlib . pyplot as plt # pour le tracé graphique

## paramètres du circuit
R = 10**3 # Ohm
C = 3*10** -7 # F
tau = R * C # constante de temps

## paramètres de résolution
t0 = 0 # instant initial
tf = 10* tau # résolution sur  l intervalle  [0 ,10* RC]
n = 1000 # nombre  d intervalles
h = (tf-t0)/n #à compléter : pas de calcul , largeur des intervalles

## Utilisation de  l algorithme   d Euler  pour  l  étude de la charge du condensateur
e = 5 # Volt (Si E=5V)
liste_t =[ t0 ] # initialisation de la liste des instants
u = 0# à compléter : initialisation avec la CI de la variable u qui contiendra les valeurs successives de la tension
liste_u =  [u]# à compléter : initialisation de la liste des tensions avec la CI

for i in range (1 , n +1) :#n instants à déterminer ( pour i allant de 1 à n+1)
    liste_t . append ( t0+i*h ) # à compléter : ajout de  l instant  ti à la liste des instants
    u = u+(e-u)/tau*h # à compléter : calcul de la valeur suivante de u à partir de la relation de récurrence
    liste_u.append(u) # à compléter : ajout u à la liste des tensions

## Tracé de u en fonction de t
plt . plot ( liste_t , liste_u ) # tracé des valeurs de liste_u en foncion des valeurs de liste_t
plt . xlabel ("t (s)") # nom de  l axe  des abscisse
plt . ylabel ("uc (V)") # nom de  l axe  des ordonnées
plt . title (" Evolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge ")
plt . show () # affiche le graphe
```



Chapitre 4 - Circuits linéaires du premier ordre		
Savoir	☺	☹
- Régime transitoire, réponse à un échellon de tension, régime libre (II.1)		
Savoir faire		
- Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent (I.3 : ex 3)		
- Utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. (II.2)		
- Déterminer rapidement le régime permanent à l'aide des comportements asymptotiques du condensateur et de la bobine (II.3)		
- Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles (II.4)		
- Résoudre l'équation différentielle du premier ordre $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{B}{\tau}$ (II.5)		
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire (II.6)		
- Réaliser un bilan énergétique (III)		
- Mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque (IV : ex 8)		