

Exercices d'application**□ Exercice 6.1. Vérification d'homogénéité**

- 1 – Homogène
- 2 – Non homogène, il y a une résistance en trop au numérateur.
- 3 – Non homogène, il manque une résistance au dénominateur.
- 4 – Homogène
- 5 – Non homogène, le premier terme est l'unique tension, il semble qu'il manque une résistance au dénominateur.

□ Exercice 6.2. Détermination de constante de temps

La réponse indicielle vaut 63% de la valeur finale en $t = \tau$. On lit graphiquement pour le système 1 : $\tau = 2s$.

La réponse indicielle a perdu 63% de la valeur initiale en $t = \tau$. On lit graphiquement pour le système 2 : $\tau = 2s$.

□ Exercice 6.4. Conditions initiales et régime permanent

1. Par continuité du courant dans une bobine : $i_4(0^+) = i_4(0^-) = 0$ (car l'interrupteur était initialement ouvert).

De plus, pour $t < 0$, l'interrupteur étant ouvert depuis longtemps, le circuit est en régime permanent (continu) et la bobine horizontale est équivalente à un fil et court-circuite la résistance R . Par conséquent la loi des mailles permet d'obtenir $i_1(0^-) = i_3(0^-) = \frac{E}{2R}$; par

continuité du courant dans une bobine, on en déduit $i_1(0^+) = i_1(0^-) = \frac{E}{2R}$.

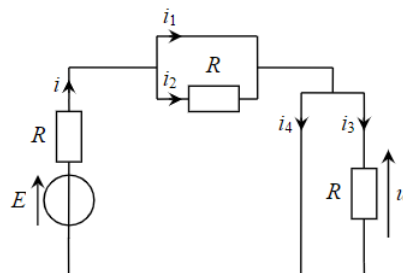
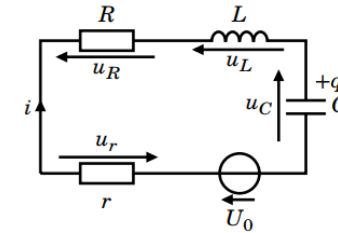
Avec des lois des nœuds, on a $i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4$ (1), soit $i(0^+) = i_3(0^+)$ (2). La loi des mailles donne $E = Ri + Ri_2 + Ri_3$ donc en $t = 0^+$, en utilisant (2) et en remplaçant i , $E = R(i_1 + i_2) + Ri_2 + R(i_1 + i_2) = 2Ri_1(0^+) + 3Ri_2(0^+)$, d'où on déduit $i_2(0^+) = 0$.

La loi des nœuds donne $i(0^+) = i_1(0^+) = \frac{E}{2R} = i_3(0^+)$. La tension vaut $u(0^+) = Ri_3(0^+) = \frac{E}{2}$.

⇒ Méthode 4.3

2. Quand t tend vers l'infini, le régime établi est atteint et les bobines sont équivalentes à des fils. Alors deux des résistances sont court-circuitées : $i_2(\infty) = i_3(\infty) = 0$ et $u(\infty) = Ri_3(\infty) = 0$.

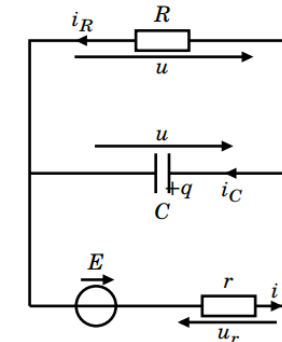
La loi des mailles permet d'obtenir $i(\infty) = \frac{E}{R}$, et la loi des nœuds permet de conclure par $i_1(\infty) = i_4(\infty) = i(\infty) = \frac{E}{R}$.

**□ Exercice 6.4. Détermination d'équations différentielles**

$$\begin{cases} U_0 - u_r - u_R - u_L - u_C = 0 & (1) \text{ Maille} \\ u_r = ri & (2) \text{ Ohm} \\ u_R = Ri & (3) \text{ Ohm} \\ u_L = L \frac{di}{dt} & (4) \text{ bobine idéale} \\ i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} & (5) \text{ condensateur parfait} \end{cases}$$

En injectant (2), (3) et (4) dans (1) il vient :

$$(r + R)i + L \frac{di}{dt} + u_C = U_0 \quad (5) \Rightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (r + R)C \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0$$



En remarquant que u est à la fois la tension aux bornes de R et de C , on écrit :

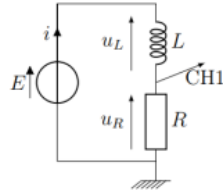
$$\begin{cases} i = i_C + i_R & (1) \text{ Nœuds} \\ E - u_r - u = 0 & (2) \text{ Maille} \\ u = Ri_R & (3) \text{ Ohm} \\ u_r = ri & (4) \text{ Ohm} \\ i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} & (5) \text{ condensateur parfait} \end{cases}$$

$$(2) \xrightarrow{(4)} ri + u = E \xrightarrow{(1)} ri_C + ri_R + u = E \xrightarrow{(3),(5)} rC \frac{du}{dt} + \frac{r}{R}u + u = E$$

$$rC \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)u = E$$

Exercices d'entraînement□ **Exercice 6.5. Circuit RL**

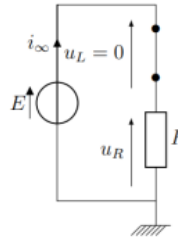
1.



2.

$i_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{E}{R}$. À la fin du régime transitoire, un nouveau régime permanent est atteint, la bobine est alors équivalente à un fil : la loi des mailles donne :

$$E = Ri_\infty \Leftrightarrow i_\infty = \frac{E}{R}$$



3. Loi des mailles : $E = u_R + u_L \Leftrightarrow E = Ri + L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}}$

4. Solution générale de l'équation différentielle : $i(t) = i_H(t) + i_P$, avec :

- $i_H(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$, la solution générale de l'équation homogène ;
- i_P une solution particulière recherchée sous la forme du 2nd membre, c'est-à-dire constant ici : $i_P = \frac{E}{R}$.

$$\text{Donc } i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}.$$

À $t = 0^-$: $i(0^-) = 0$.

Or l'intensité du courant à travers une bobine étant une fonction continue du temps, donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

$$\text{Ainsi } K = -\frac{E}{R}, \text{ ainsi } \boxed{i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}$$

5. t_m est tel que : $i(t_m) = 0,95i_\infty$ (l'intensité correspond à 95 % de l'intensité finale à $t = \infty$).

$$\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t_m}{\tau}} \right) = 0,95 \frac{E}{R} \Leftrightarrow e^{-\frac{t_m}{\tau}} = 0,05 \Leftrightarrow \boxed{t_m = -\tau \ln(0,05)}$$

6. Par lecture graphique :

$$\text{— } \boxed{i_\infty = 0,44 \text{ mA}}, \text{ or } \frac{E}{R} = \frac{1,0 \text{ (V)}}{2,10^3 \text{ (}\Omega\text{)}} = 0,5 \text{ mA}.$$

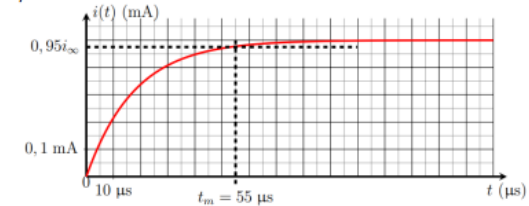
En pratique, $i_\infty = \frac{E}{R_{tot}}$ et on peut alors déterminer $r_L + r_{GBF} = R_{tot} - R = 270 \Omega$.

$$\text{— } 0,95i_\infty = 0,475 \text{ mA} \Rightarrow t_m = 55 \mu\text{s} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{-t_m}{\ln(0,05)} = 18,4 \mu\text{s}}.$$

Or $\frac{L}{R} = 19,98 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. On constate que $\tau < \frac{L}{R}$, cela peut s'expliquer par la non prise en compte de la résistance interne de la bobine et de celle du générateur.

En pratique $\tau = \frac{L}{R_{tot}}$ avec $R_{tot} = r_L + r_{GBF}$ la résistance totale dans le circuit.

On en déduit que $R_{tot} = \frac{L}{\tau} = 2,3 \cdot 10^3 \Omega$, donc $\boxed{r_L + r_{GBF} = 300 \Omega}$.



7. Pour obtenir un bilan de puissance, il faut multiplier la loi des mailles par i :

$$\begin{aligned} u_L \times i + u_R \times i &= E \times i \\ \text{ainsi : } \underbrace{L \frac{di}{dt} \times i}_{= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \text{ puissance reçue par } L} + \underbrace{Ri^2}_{\text{Puissance dissipée par effet Joule}} &= \underbrace{Ei}_{\text{Puissance fournie par le générateur}} \end{aligned}$$

□ **Exercice 6.6. Décharge d'un condensateur dans un autre**

1. Courant traversant le condensateur 1 : $i_1 = C \frac{du_1}{dt}$. Et pour le second : $i_2 = C \frac{du_2}{dt}$. Mais ces deux courants sont les mêmes, donc en simplifiant par C : $\frac{du_1}{dt} = \frac{du_2}{dt}$.

On a donc $\frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = 0$, donc $u_1 - u_2 = \text{cst} = U_0$ (on trouve la constante en prenant $t = 0$).

2. Loi des mailles : $u_1 + u_R + u_2 = 0$, avec $u_R = Ri = RC \frac{du_1}{dt}$ et $u_2(t) = u_1(t) - U_0$ on obtient :

$$\boxed{u_1 + RC \frac{du_1}{dt} + u_1 - U_0 = 0, \text{ soit } \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{\tau} = \frac{U_0}{2\tau}}$$

avec $\tau = \frac{RC}{2}$.

3. En régime stationnaire, $\frac{du_1}{dt} = 0$ et l'équation donne $\boxed{u_1 = \frac{U_0}{2}}$.

$$\text{On a donc aussi } \boxed{u_2 = u_1 - U_0 = -\frac{U_0}{2}}.$$

4. Initialement $\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} C u_1^2 = \frac{1}{2} C U_0^2$.

À la fin : $\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} C u_1^2 + \frac{1}{2} C u_2^2 = 2 \times \frac{1}{2} C (U_0/2)^2 = \frac{1}{4} C U_0^2$.

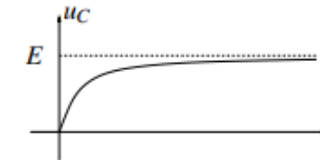
Bilan : il manque $\frac{1}{2} C U_0^2 - \frac{1}{4} C U_0^2 = \frac{1}{4} C U_0^2$, c'est-à-dire la moitié de l'énergie initiale, qui a été dissipée par effet Joule dans la résistance.

□ Exercice 6.7. Résolution de problème

— Dimensionnement de C :Durée d'un aller-retour : 14 minutes ; puissance $P = 2 \times 100 \times 735 \text{ W}$; énergie $\mathcal{E} = P \times \Delta t = 1,23 \times 10^8 \text{ J}$.Énergie stockée par les condensateurs : $\frac{1}{2} C_{\text{tot}} U^2$ avec $U = 400 \text{ V}$.Il faut donc $\frac{1}{2} C_{\text{tot}} U^2 = \mathcal{E}$, d'où $C_{\text{tot}} = \frac{2\mathcal{E}}{U^2} = 1543 \text{ F}$.Or $N = 100$ condensateurs, donc 15,4 F par condensateur.— Dimensionnement de R :Le temps de charge est de l'ordre de $t = 5\tau = RC_{\text{tot}}$. En prenant $t = 4 \text{ min}$, il faut donc $R = \frac{t}{5C_{\text{tot}}} = 0,031 \Omega$.Pour réviser le chapitre :

Exercice 6.8. Circuit à condensateur

1. Pour un temps infini, on obtient le régime permanent qui est ici continu. Par conséquent, les dérivées temporelles sont nulles soit $i = 0$.
2. En écrivant la loi des mailles avec $i = 0$, on a $u_C = E$.
3. Dans ces conditions, la capacité C se comporte comme un interrupteur puisqu'il n'y a pas de courant.
4. En écrivant une loi des mailles ainsi que la relation $i = C \frac{du_C}{dt}$, on obtient $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$.
5. La quantité τ est homogène à un temps dit caractéristique donc τ s'exprime en secondes.
6. En résolvant l'équation différentielle avec la condition initiale $u_C = 0$, on obtient $u_C = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right)$ et $u_C = E$ pour un temps infini.
7. On a une asymptote $u = E$ et l'allure est la suivante :



8. L'équation de la tangente à l'origine s'écrit $u_C = \frac{du_C}{dt}(t=0)t + u_C(0) = \frac{E}{RC}t$.
9. L'intersection avec l'asymptote $u_C = E$ s'obtient pour $t = \tau$.
10. Il faut résoudre l'équation $u_C(t) = 0,99E$. On obtient $t_1 = RC \ln 100$.
11. L'intensité s'obtient par la relation $i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$.
12. L'énergie emmagasinée dans C s'écrit $E_C = \int_0^{+\infty} u_C(t)i(t)dt = \frac{CE^2}{2}$.
13. L'énergie dissipée par effet Joule est $E_J = \int_0^{+\infty} Ri^2(t)dt = \frac{CE^2}{2}$.
14. L'énergie fournie par le générateur vaut $E_G = \int_0^{+\infty} Ei(t)dt = CE^2$.
15. On constate que $E_G = E_C + E_J$, ce qui traduit la conservation de l'énergie.
16. On a $\rho = \frac{CE^2}{2CE^2} = 0,5$.