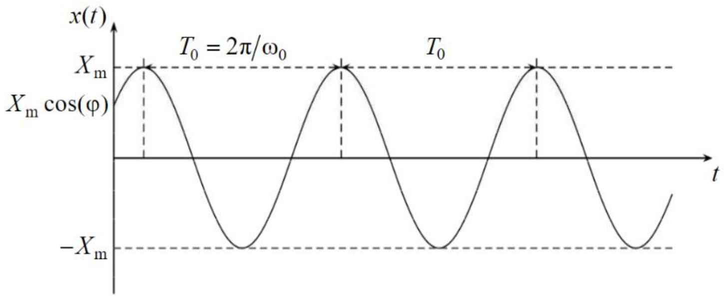
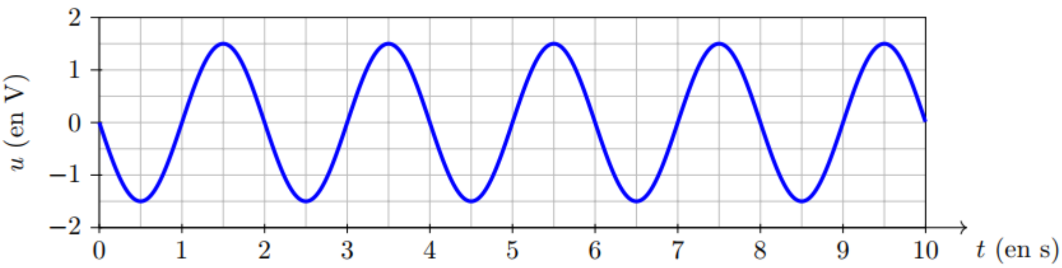
# I] Approche phénoménologique

## 1. Caractérisation d'un signal harmonique ★




En travaux pratiques, vous faites l'acquisition d'une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ et obtenez l'oscillogramme ci-dessous.




Par lecture graphique ou par le calcul, déterminer :

a) l'amplitude $U_0$ ..............

b) la phase à l'origine $\varphi$ ........

c) la période $T$ .................

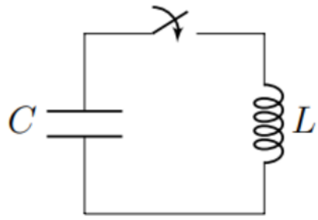
d) la fréquence $f$ ...............

e) la pulsation $\omega$. ..............

## II] Mise en équation

### 1. Oscillateur harmonique électrique ★

On étudie le circuit ci-contre constitué d'un condensateur de capacité $C$ et d'une bobine idéale d'inductance $L$. Le condensateur a été chargé sous une tension $E$.




A l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le condensateur à la bobine en série.

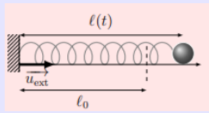
**Énoncé** :
**1.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
**2.** La mettre sous la forme canonique et identifier la pulsation propre de l'oscillateur électrique.

## 2. Oscillateur harmonique mécanique

### a. Modélisation physique d'un ressort

**Savoir - Expression de la force de rappel élastique**

La force de rappel élastique exercée par un ressort de **longueur à vide** $\ell_0$, de constante de raideur $k$ et de **longueur instantanée** $\ell(t)$ s'écrit :




$$\boxed{\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_{\text{ext}}}}$$

avec $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ le **vecteur unitaire dirigé du point d'attache du ressort vers la masse** $m$, c'est-à-dire vers l'**extérieur du ressort**.

### b. Equilibre mécanique

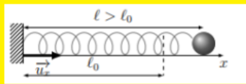
Une **position d'équilibre** $x_{\text{éq}}$ est une position telle que si on y pose le système sans vitesse initiale alors il reste :

$$\text{Si à } t = 0 \text{ , } x(t=0) = x_{\text{éq}} \text{ et } \frac{dx}{dt}(t=0) = 0 \text{ , alors } \forall t > 0 \text{ , } \frac{dx}{dt}(t) = 0$$

### c. Equation différentielle ★

**Énoncé** :

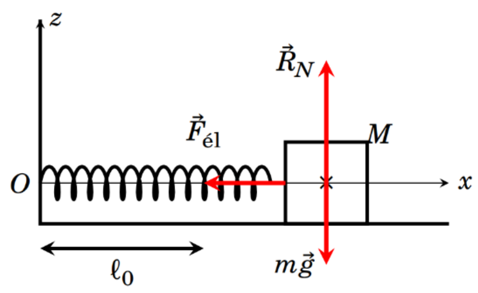
On considère une masse $m$, assimilée à un point matériel, liée à un ressort, et se déplaçant sans frottement sur un support horizontal, comme sur le schéma ci-contre.




**1.** Commencer l'étude générale du système mécanique.
**2.** Énoncer le Principe Fondamental de la Dynamique (2ème loi de Newton) en référentiel galiléen.
**3.** L'appliquer au système étudié.
**4.** Le mouvement se faisant selon l'axe horizontal $(Ox)$, projeter l'équation précédente selon $\overrightarrow{u}_x$ afin d'obtenir une relation entre $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $x$ : c'est une équation différentielle.
**5.** Mettre l'équation différentielle sous la forme canonique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$$

et donner l'expression de $\omega_0$ en fonction de $k$ et $m$.
**6.** Déterminer la dimension et l'unité (dans le système international) de $\omega_0$.



## III] Résolution

### 1. Solution générale

**Savoir - Solution générale de $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$**

La solution générale de l'équation différentielle $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ s'écrit :

$$y_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
$$y_H(t) = Y_m\cos(\omega_0 t + \phi)$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $(Y_m, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi]$, les deux constantes d'intégration.

*Remarque : grâce aux formules de trigo,* $Y_m\cos(\phi) = A$ *et* $-Y_m\sin(\phi) = B$ ; $A^2 + B^2 = Y_m^2$ ; $\tan(\phi) = -B/A$.

**Savoir faire - Résoudre l'équation différentielle $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = b$**

1. Écrire la solution générale $y_H$ de l'équation homogène sans second membre ( $\ddot{y}_H + \omega_0^2 y_H = 0$) :

$$y_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle étudiée, recherchée sous la forme du second membre, constant ici : $y_p$ telle que $\dfrac{dy_P}{dt} = 0$, alors $\omega_0^2 y_P = b \Rightarrow y_P = \dfrac{b}{\omega_0^2}$ .

3. Écrire la solution générale comme la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$y(t) = y_H(t) + y_P$$
$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + y_P$$

4. Déterminer les deux constantes d'intégration $(A, B)$ à l'aide des deux conditions initiales $y(t = 0) = y_0$ et $\dfrac{dy}{dt}(t = 0) = v_0$.

   a) D'après la solution $y(0) = A + \dfrac{b}{\omega_0^2}$, or d'après la CI $y(0) = y_0$. Ainsi $A + \dfrac{b}{\omega_0^2} = y_0$, donc $A = y_0 - \dfrac{b}{\omega_0^2}$

   b) On calcule $\dfrac{dy}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ .
   Puis on exprimer la valeur en $t = 0$ : $\dot{y}(0) = B\omega_0$. Et on en déduit $B\omega_0 = v_0$, d'où $B = \dfrac{v_0}{\omega_0}$

5. Conclure sur l'expression de $y(t)$.

## 2. Oscillateur électrique ★

**Énoncé** : On reprend le circuit étudié Déterminer les valeurs de $u_c$, $i$ et $\dfrac{du_C}{dt}$ à l'instant $t = 0^+$ (juste après la fermeture de l'interrupteur).

**Énoncé** :
**1.** Résoudre l'équation différentielle $\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0$ en utilisant les conditions initiales déterminées précédemment.
**2.** Représenter l'allure de $u_c$ en fonction du temps.

## 3. Oscillateur mécanique ★

**Énoncé** : Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$ en tenant compte des conditions initiales suivantes et représenter $x(t)$ dans les différents cas.

**1.** On étire le ressort depuis sa position d'équilibre d'une distance $a$ et on lâche la masse sans vitesse initiale : $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ et $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ .

**2.** Depuis la position d'équilibre, on communique une vitesse initiale à la masse : $x(0) = x_{\text{éq}}$ et $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$ .

## 4. Propriétés fondamentales de l'oscillateur harmonique ★

## IV] Aspect énergétique

### 1. Oscillateur électrique ★

**Énoncé** :
**1.** Effectuer un bilan de puissance du circuit LC. L'interpréter.
**2.** En utilisant les résultats de la partie III, représenter l'allure des énergies stockées par le condensateur et la bobine au cours du temps.

### 2. Oscillateur mécanique ★

**Savoir - Expression des énergies cinétique, potentielle de pesanteur, élastique et mécanique**

• L'**énergie cinétique** d'un point matériel $M$ de masse $m$, ayant la vitesse $\overrightarrow{v}$ s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\|\overrightarrow{v}^2\|}$$

• L'**énergie potentielle de pesanteur** d'un point matériel de masse $m$, repéré par son altitude $z$ :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{pp}} = \pm mgz + K}$$

avec « + » si $(Oz)$ est ascendant ; « − » si $(Oz)$ est descendant ; $K$ une constante ;

• L'**énergie potentielle élastique** d'un point matériel accrochée à un ressort est :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{p,élastique}} = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2 + K_0}$$

avec $K_0$ une constante ;
Plus la longueur $\ell$ du ressort est différente de la longueur à vide $\ell_0$, plus l'énergie emmagasinée par le système est importante.

• On appelle **énergie mécanique**, notée $\mathcal{E}_m$, la somme de ses énergies cinétique $E_c$ et potentielles $\mathcal{E}_p$ :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p}$$

Toutes les énergies s'expriment en Joule (J), avec 1 J = 1 kg.m$^2$·s$^{-2}$.

**Énoncé** : Considérons le cas général d'un oscillateur mécanique horizontal caractérisé par l'évolution de la position au cours du temps telle que $\ell(t) = x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \phi) + x_{éq}$.
**1.** Exprimer l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,\text{élastique}}$ en fonction de $X_m$, $\omega_0$, $\phi$, $k$, $t$. On choisira $K_0$ telle que $\mathcal{E}_{p,\text{élastique}} = 0$ pour $\ell = \ell_0$ .
**2.** Exprimer l'énergie cinétique en fonction de $X_m$, $\omega_0$, $\phi$, $m$, $t$ ; puis en fonction de $X_m$, $\omega_0$, $\phi$, $k$, $t$.
**3.** Exprimer l'énergie mécanique en fonction de $k$ et $X_m$, puis en fonction de $m$, $\omega_0$ et $X_m$. Commenter.
**4.** Tracer l'allure de l'évolution temporelle des trois énergies avec les conditions initiales : $x(0) = x_{éq} + a$ et $v(0) = 0$ m.s$^{-1}$ .

| Oscillateur mécanique | Oscillateur électrique LC série |
|---|---|
| position $x(t)$ | Charge du condensateur $q(t)$ |
| vitesse $v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}$ | Intensité du courant $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ |
| Équation différentielle $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = kx_{éq}$ | Équation différentielle $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{q}{C} = 0$ |
| Constante de raideur du ressort $k$ | Capacité du condensateur $\dfrac{1}{C}$ |
| Masse $m$ | Inductance $L$ |
| Pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ | Pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ |
| $\mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ | $\mathcal{E}_{\text{stockée dans C}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$ |
| $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ | $\mathcal{E}_{\text{stockée dans L}} = \dfrac{1}{2}Li^2$ |