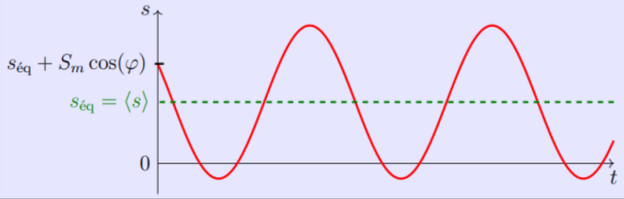
I] Approche phénoménologique

1. Caractérisation d'un signal harmonique ★

Savoir - Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation

Un signal harmonique s'écrit : $s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi) + s_{\text{éq}}$

- S_m est l'**amplitude** : $S_m = \dfrac{s_{\max} - s_{\min}}{2}$. C'est une grandeur positive de même dimension que s.
- ω est la **pulsation**, en rad/s.
- ϕ est la **phase à l'origine des temps**, en radians.
- $< s(t) >= s_{\text{éq}} = \dfrac{s_{\max} + s_{\min}}{2}$ est la **valeur moyenne** de s : c'est la valeur autour de laquelle oscille s.



Savoir - Liens entre fréquence f, période T, et pulsation ω

La **période** T est la plus petite durée non nulle entre deux vibrations identiques. Elle s'exprime en seconde (s).

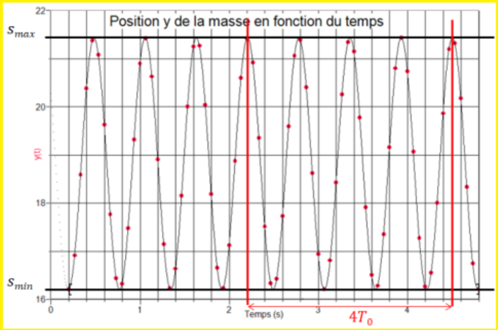
La **fréquence** est définie par $f = \dfrac{1}{T}$. Elle s'exprime en hertz (Hz).

On peut montrer que : $\boxed{\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}}$

Énoncé :

On a filmé les oscillations de la masse m en fonction du temps. Sur la vidéo nous avons défini une échelle (pour faire le lien entre pixel et cm), ainsi que l'origine du repère, qui a été placée au point d'attache du ressort. On a pu pointer la position de la masse m en fonction du temps, et on a obtenu la courbe ci-contre.

Pour les oscillateurs harmoniques mécaniques et électriques, on parle de **pulsation propre**, notée ω_0 et de **période propre**, notée T_0, car elles sont propres au système, et indépendantes du milieu extérieur.



1. Déterminer graphiquement l'amplitude.
2. Déterminer graphiquement la valeur moyenne.
3. Déterminer graphiquement la période propre, notée T_0 .
4. Déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0 .
5. Déterminer la valeur de la phase à l'origine des temps ϕ. Attention : la valeur de la phase à l'origine des temps ϕ ne se lit pas directement sur le graphe de $y(t)$.

Correction :

1. Graphiquement, on lit $y_{\max} = 21,5$ cm et $y_{\min} = 16,2$ cm donc $\underline{Y_m = 2,65 \text{ cm}}$.
2. On a donc $\underline{y_{\text{eq}} = 18,85 \text{ cm}}$.
3. Graphiquement, $4T_0 = 2,3$ s donc $\underline{T_0 = 0,575 \text{ s}}$.
4. $\boxed{\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}}$ donc $\underline{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{0,575} = \underline{1,13 \text{ rad.s}^{-1}}$.

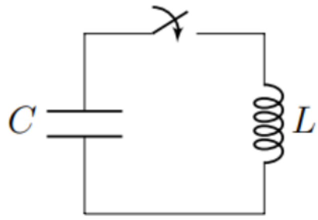
5. À $t = 0$, on lit $y(t = 0) = 20,3$ cm. Or, $\cos(\phi) = \dfrac{y(0) - y_{\text{eq}}}{Y_m}$, donc : $\boxed{\phi = \arccos\left(\dfrac{y(0) - y_{\text{eq}}}{y_m}\right)}$.

A.N : $\underline{\phi} = \arccos\left(\dfrac{20,3 - 18,85}{2,65}\right) = \underline{0,99 \text{ rad}}$.

II] Mise en équation

1. Oscillateur harmonique électrique ★

On étudie le circuit ci-contre constitué d'un condensateur de capacité *C* et d'une bobine idéale d'inductance *L*. Le condensateur a été chargé sous une tension *E*.



A l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le condensateur à la bobine en série.

Énoncé :

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

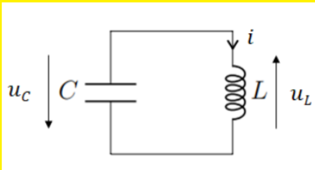
2. La mettre sous la forme canonique et identifier la pulsation propre de l'oscillateur électrique.

Correction :

1. — Loi des mailles : $u_c(t) + u_L(t) = 0$;

— Relation du condensateur : $i(t) = C\dfrac{du_c}{dt}$

— Relation de la bobine : $u_L(t) = L\dfrac{di}{dt}$



En combinant, on obtient : $\boxed{u_C(t) + LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} = 0}$

2. Ainsi : $\boxed{\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}u_C(t) = 0}$

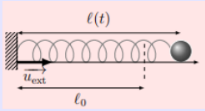
On identifie la pulsation propre comme étant égale à : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}}$.

2. Oscillateur harmonique mécanique

a. Modélisation physique d'un ressort ★

Savoir - Expression de la force de rappel élastique

La force de rappel élastique exercée par un ressort de **longueur à vide** ℓ_0, de constante de raideur k et de **longueur instantanée** $\ell(t)$ s'écrit :



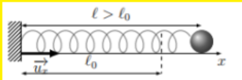
$$\boxed{\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_{\text{ext}}}}$$

avec $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ le **vecteur unitaire dirigé du point d'attache du ressort vers la masse** m, c'est-à-dire vers l'**extérieur du ressort**.

b. Equation différentielle ★

Énoncé :

On considère une masse m, assimilée à un point matériel, liée à un ressort, et se déplaçant sans frottement sur un support horizontal, comme sur le schéma ci-contre.



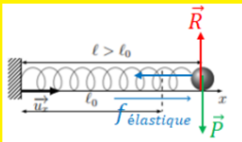
1. Commencer l'étude générale du système mécanique.
2. Énoncer le Principe Fondamental de la Dynamique (2ème loi de Newton) en référentiel galiléen.
3. L'appliquer au système étudié.
4. Le mouvement se faisant selon l'axe horizontal (Ox), projeter l'équation précédente selon $\overrightarrow{u}_x$ afin d'obtenir une relation entre $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ et x : c'est une équation différentielle.
5. Mettre l'équation différentielle sous la forme canonique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$$

et donner l'expression de ω_0 en fonction de k et m.
6. Déterminer la dimension et l'unité (dans le système international) de ω_0.

Correction :

1. Système : {masse} ; Référentiel : terrestre supposé galiléen ; repère d'espace : cartésien (axe (Ox)) . Les forces subies sont le poids, la force de rappel élastique et la réaction (normale) du support.



2. Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un point matériel obéit à la loi d'évolution :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}} \text{ où } \sum \vec{F} \text{ est la somme des forces subies par le point matériel.}$$

3. $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} + \vec{P} + \overrightarrow{f_{\text{élastique}}} \Rightarrow \boxed{m\dfrac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x} = R\overrightarrow{u_z} - mg\overrightarrow{u_z} - k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u}_x = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u}_x}$.

4. En projettant suivant $\overrightarrow{u}_x$, on aboutit à : $m\dfrac{d^2x}{dt} = -k(\ell - \ell_0)$. En notant qu'ici : $x(t) = \ell(t)$, on aboutit à l'équation différentielle : $\boxed{m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = k\ell_0}$.

5. On divise l'équation précécente par m : $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{k}{m}\ell_0}$.

On identifie à la forme canonique $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ et $\boxed{x_{\text{éq}} = \ell_0}$.

6. $\boxed{\dim(\omega_0)} = \dim\left(\dfrac{k}{m}\right)^{(1/2)} = \left(\dfrac{\dim(k)}{\dim(m)}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{M.T^{-2}}{M}\right)^{1/2} = \boxed{T^{-1}}$.

$\underline{\omega_0 \text{ à donc la dimension de l'inverse d'un temps et s'exprime en rad.s}^{-1}}$.

III] Résolution

1. Solution générale

Savoir - Solution générale de $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$

La solution générale de l'équation différentielle $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ s'écrit :

$$y_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
$$y_H(t) = Y_m\cos(\omega_0 t + \phi)$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $(Y_m, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi]$, les deux constantes d'intégration.

Remarque : grâce aux formules de trigo, $Y_m\cos(\phi) = A$ et $-Y_m\sin(\phi) = B$; $A^2 + B^2 = Y_m^2$; $\tan(\phi) = -B/A$.

Savoir faire - Résoudre l'équation différentielle $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = b$

1. Écrire la solution générale y_H de l'équation homogène sans second membre ($\ddot{y}_H + \omega_0^2 y_H = 0$) :

$$y_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle étudiée, recherchée sous la forme du second membre, constant ici : y_p telle que $\dfrac{dy_P}{dt} = 0$, alors $\omega_0^2 y_P = b \Rightarrow y_P = \dfrac{b}{\omega_0^2}$.
3. Écrire la solution générale comme la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$y(t) = y_H(t) + y_P$$
$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + y_P$$

4. Déterminer les deux constantes d'intégration (A, B) à l'aide des deux conditions initiales $y(t = 0) = y_0$ et $\dfrac{dy}{dt}(t = 0) = v_0$.
   a) D'après la solution $y(0) = A + \dfrac{b}{\omega_0^2}$, or d'après la CI $y(0) = y_0$. Ainsi $A + \dfrac{b}{\omega_0^2} = y_0$, donc $A = y_0 - \dfrac{b}{\omega_0^2}$
   b) On calcule $\dfrac{dy}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$.
   Puis on exprimer la valeur en $t = 0$: $\dot{y}(0) = B\omega_0$. Et on en déduit $B\omega_0 = v_0$, d'où $B = \dfrac{v_0}{\omega_0}$
5. Conclure sur l'expression de $y(t)$.

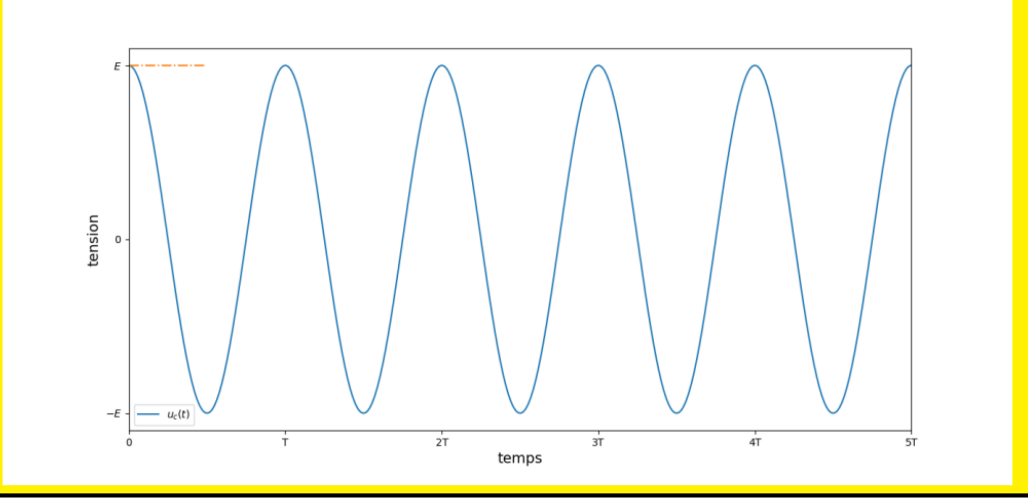
2. Oscillateur électrique

Énoncé : On reprend le circuit étudié II.2 . Déterminer les valeurs de u_c, i et $\frac{du_C}{dt}$ à l'instant $t = 0^+$ (juste après la fermeture de l'interrupteur).

Correction :
Avant la fermeture de l'interrupteur, on a, à $t = 0^-$: $u_c = E$, $i = 0$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $\boxed{u_c(t = 0^+) = E}$. La continuité de l'intensité du courant à travers la bobine est telle que $\boxed{i(t = 0^+) = 0}$. Par ailleurs, $q(t) = Cu_c(t)$ donc $\boxed{\frac{du_c}{dt}(t = 0^+)} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}(t = 0^+) = \frac{i}{C}(t = 0^+) = \boxed{0}$.

Énoncé :
1. Résoudre l'équation différentielle $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0$ en utilisant les conditions initiales déterminées précédemment.
2. Représenter l'allure de u_c en fonction du temps.

Correction :
1. La solution générale de l'équation de l'oscillateur harmonique électrique est : $u_c(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.
Avec les conditions initiales, on obtient : $A = E$ et $B = 0$. Finalement : $\boxed{u_c(t) = E\cos(\omega_0 t)}$.
2.



3. Oscillateur mécanique

Énoncé : Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$ en tenant compte des conditions initiales suivantes et représenter $x(t)$ dans les différents cas.

1. On étire le ressort depuis sa position d'équilibre d'une distance a et on lâche la masse sans vitesse initiale : $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ et $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$.

2. Depuis la position d'équilibre, on communique une vitesse initiale à la masse : $x(0) = x_{\text{éq}}$ et $\dfrac{dx}{dt}(0) = v_0$.

Correction : La solution générale est $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_P = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}$.
Il faut déterminer A et B avec les conditions initiales.

1. On a $x(0) = x_{\text{éq}} + a = A + x_{\text{éq}}$ d'où $\boxed{A = a}$.

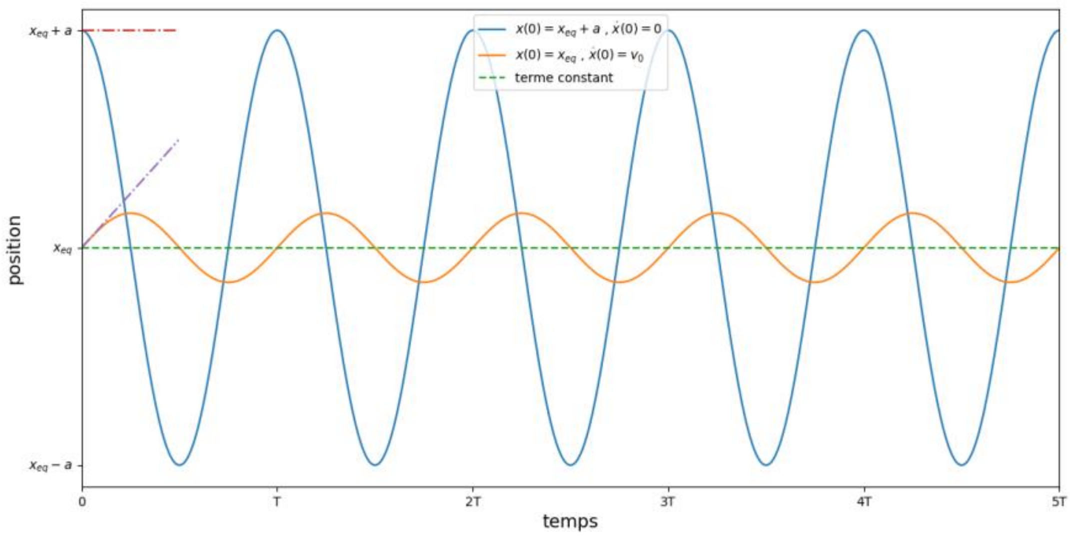
Par ailleurs : $\dot{x}(t) = -a\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$, donc $\dot{x}(0) = B\omega_0 = 0$, d'où $\boxed{B = 0}$.

Finalement : $\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}}$

2. On a $x(0) = x_{\text{éq}} = A + x_{\text{éq}}$ d'où $\boxed{A = 0}$.

Par ailleurs : $\dot{x}(t) = B\omega_0\cos(\omega_0 t)$, donc $\dot{x}(0) = B\omega_0 = v_0$, d'où $\boxed{B = \dfrac{v_0}{\omega_0}}$.

Finalement : $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}}$



4. Propriétés de l'oscillateur harmonique ★

• Les oscillations, **sinusoïdales**, **persistent indéfiniment** dans le temps sans atténuation.

• La période des oscillations est égale à $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ quelle que soit la condition initiale imposée en particulier quelle que soit l'amplitude des oscillations. On parle d'**isochronisme des oscillation.**

• Il y a **équirépartition de l'énergie**. (Cf : Partie IV)

IV] Aspect énergétique

1. Oscillateur électrique ★

Exercice 10 - Savoir faire : Réaliser un bilan énergétique

Énoncé :
1. Effectuer un bilan de puissance du circuit LC. L'interpréter.
2. En utilisant les résultats de l'exercice 8, représenter l'allure des énergies stockées par le condensateur et la bobine au cours du temps.

Correction :
1. Multiplions la loi des mailles par i : $0 = u_c \times i + L\dfrac{di}{dt} \times i$, ainsi : $0 = \underbrace{u_c \times i}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right)} + \underbrace{L\dfrac{di}{dt} \times i}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}$.

Finalement : $\boxed{\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_C = 0}$. La puissance algébriquement reçue par la bobine compense à chaque instant la puissance algébriquement reçue par le condensateur. Dans ce modèle, il n'y a pas d'effet dissipatif (pas d'effet joule).

2. Nous avons d'une part : $\mathcal{E}_C = \dfrac{1}{2}Cu_c^2 = \dfrac{1}{2}CE^2\cos^2(\omega_0 t)$.

D'autre part, $\mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{1}{2}LC^2E^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \dfrac{1}{2}CE^2\sin^2(\omega_0 t)$.

On note qu'à chaque instant : $\mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C = \dfrac{1}{2}CE^2$.

2. Oscillateur mécanique ★

Savoir - Expression des énergies cinétique, potentielle de pesanteur, élastique et mécanique

- L'**énergie cinétique** d'un point matériel M de masse m, ayant la vitesse $\vec{v}$ s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\|\vec{v}^2\|}$$

- L'**énergie potentielle de pesanteur** d'un point matériel de masse m, repéré par son altitude z :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{pp}} = \pm mgz + K}$$

avec « + » si (Oz) est ascendant ; « − » si (Oz) est descendant ; K une constante ;

- L'**énergie potentielle élastique** d'un point matériel accrochée à un ressort est :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{p,élastique}} = \frac{1}{2}k\,(\ell - \ell_0)^2 + K_0}$$

avec K_0 une constante ;
Plus la longueur ℓ du ressort est différente de la longueur à vide ℓ_0, plus l'énergie emmagasinée par le système est importante.

- On appelle **énergie mécanique**, notée $\mathcal{E}_m$, la somme de ses énergies cinétique E_c et potentielles $\mathcal{E}_p$:

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p}$$

Toutes les énergies s'expriment en Joule (J), avec 1 J = 1 kg.m^2·s^{-2}.

Énoncé : Considérons le cas général d'un oscillateur mécanique horizontal caractérisé par l'évolution de la position au cours du temps telle que $\ell(t) = x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \phi) + x_{\text{éq}}$.

1. Exprimer l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{\text{p,élastique}}$ en fonction de X_m, ω_0, ϕ, k, t. On choisira K_0 telle que $\mathcal{E}_{\text{p,élastique}} = 0$ pour $\ell = \ell_0$.

2. Exprimer l'énergie cinétique en fonction de X_m, ω_0, ϕ, m, t ; puis en fonction de X_m, ω_0, ϕ, k, t.

3. Exprimer l'énergie mécanique en fonction de k et X_m, puis en fonction de m, ω_0 et X_m. Commenter.

4. Tracer l'allure de l'évolution temporelle des trois énergies avec les conditions initiales : $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ et $v(0) = 0\ \text{m.s}^{-1}$.

Correction :

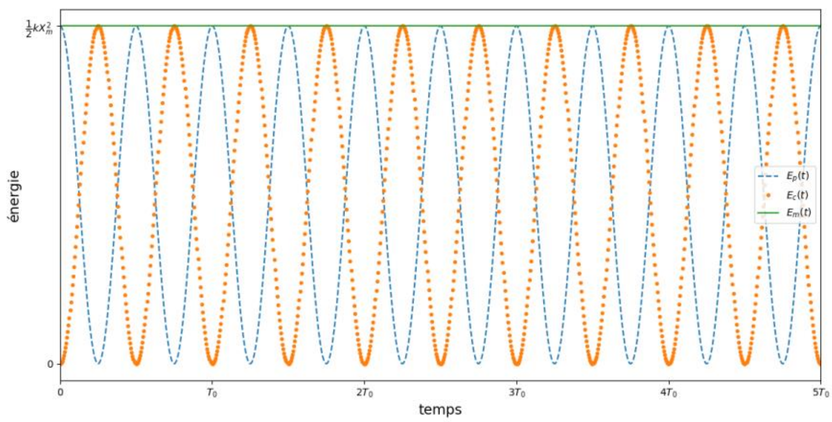
1. Pour l'oscillateur harmonique horizontal, $x_{\text{éq}} = \ell_0$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{E}_{\text{p,élastique}} = \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)}$.

2. $v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \phi)$ d'où $\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m X_m^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)}$. On a vu par ailleurs que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ donc $m = \frac{k}{\omega_0^2}$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)}$

3. $\boxed{\mathcal{E}_m} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) = \boxed{\frac{1}{2} k X_m^2 = \frac{1}{2} X_m^2 m \omega_0^2}$. L'énergie mécanique est ici une constante du mouvement.

4. Avec $v(0) = 0 = -\omega_0 X_m sin(\phi)$, on a nécessairement $\phi = 0$. Par ailleurs $x(0) = x_{\text{éq}} + a = x_{\text{éq}} + X_m$ donc $X_m = a$.

Finalement : $\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2(\omega_0 t) \text{ et } \mathcal{E}_{\text{p,élastique}} = \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t)}$.



On note que la période des énergies est la moitié de celle de l'oscillateur harmonique T_0, ce qui se comprend en linéarisant les termes $\sin^2$ et $\cos^2$. En effet : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, aussi :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{4} k X_m^2 (1 - \cos(2\omega_0 t)) \text{ et } \mathcal{E}_{\text{p,élastique}} = \frac{1}{4} k X_m^2 (1 + \cos(2\omega_0 t))}$$

Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique LC série
position $x(t)$	Charge du condensateur $q(t)$
vitesse $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$	Intensité du courant $i(t) = \frac{dq}{dt}$
Équation différentielle $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = kx_{\text{éq}}$	Équation différentielle $L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$
Constante de raideur du ressort k	Capacité du condensateur $\frac{1}{C}$
Masse m	Inductance L
Pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2$	$\mathcal{E}_{\text{stockée dans C}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$	$\mathcal{E}_{\text{stockée dans L}} = \frac{1}{2}Li^2$