Chapitre 0 - Analyse dimensionnelle

Table des matières

Guide de révision du chapitre 0	
Apprenti/Appentie	Savoir et Savoir faire du chapitre leçon 0 + exercices du cours
Confirmé/Confirmée	Savoir et Savoir faire du chapitre 0 + exercices du cours + TD : ex 1, 2, 3
Expert/Experte	Savoir et Savoir faire du chapitre 0 + exercices du cours + TD : ex 4, 5

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'aborder quelques notions que vous avez déjà rencontrées au lycée et qui vous seront utiles tout au long de vos études. Nous allons repréciser le système international, ses dimensions et ses unités, et reverrons les conversions. Enfin, nous utiliserons l'analyse dimensionnelle notamment pour étudier l'homogénéité d'une expression, qui sera une étape indispensable pour l'ensemble des calculs que vous effectuerez.

I. Dimensions et unités fondamentales

1. Dimensions et unités du système international (SI)

. Dimension et unité

• La **dimension** d'une grandeur renseigne sur sa nature physique. Par exemple une distance, une altitude, ont pour dimension une longueur.
• **La dimension d'une grandeur physique est plus générale que l'unité** : la même grandeur peut s'exprimer avec des unités très différentes.
• **L'unité** est indispensable pour renseigner sur la valeur de la grandeur physique. Elle est inutile sinon.

On peut montrer que la dimension de n'importe quelle grandeur physique peut toujours s'exprimer en fonction de sept dimensions « fondamentales », auxquelles on associe 7 unités de base, celles du système international définies par le BIPM[1] `https://www.bipm.org/fr/measurement-units/`

. Système international

Savoir - Unités et dimensions du système international

Grandeur	Symbole dimensionnel	Unité (SI)
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Intensité du courant	I	Ampère (A)
Température	Θ	Kelvin (K)
Quantité de matière	N	mole (mol)
Intensité lumineuse	J	Candela (Cd)

Le Système International est né en 1960 (11^{e} CGPM[2]) avec 6 unités de base, la mole a été ajoutée au SI en 1971 (14^{e} CGPM).

2. Conversions et préfixes des unités du SI

Savoir - Préfixes et unités

Il faut connaître les préfixes et unités du femto au tera.

Vers le très petit :											
quecto	ronto	yocto	zepto	atto	femto	pico	nano	micro	milli	centi	déci
q	r	y	z	a	f	p	n	μ	m	c	d
10^{-30}	10^{-27}	10^{-24}	10^{-21}	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
Vers le très grand :											
déca	hecto	kilo	mega	giga	tera	péta	exa	zetta	yotta	ronna	quetta
da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y	R	Q
10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}

1. Bureau International des Poids et Mesures, organisation intergouvernementale
2. CGPM = Conférence générale des poids et mesures. C'est l'assemblée générale du BIPM qui se réunit tous les 4 ans

3. La définition actuelle des 7 unités du SI

LA SECONDE

La seconde, symbole s, est l'unité de temps du SI. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de la fréquence du césium, $\Delta\nu_{Cs}$, la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, égale à 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en Hz, unité égale à s^{-1}.

LE MÈTRE

Le mètre, symbole m, est l'unité de longueur du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide, c, égale à 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en $m\ s^{-1}$, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$.

LE KILOGRAMME

Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, h, égale à $6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en J s, unité égale à $kg\ m^2 s^{-1}$, le mètre et la seconde étant définis en fonction de c et $\Delta\nu_{Cs}$.

L'AMPÈRE

L'ampère, symbole A, est l'unité de courant électrique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, e, égale à $1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ lorsqu'elle est exprimée en C, unité égale à A s, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$.

LE KELVIN

Le kelvin, symbole K, est l'unité de température thermodynamique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Boltzmann, k, égale à $1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en $J\ K^{-1}$, unité égale à $kg\ m^2 s^{-2} K^{-1}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h, c et $\Delta\nu_{Cs}$.

LA MOLE

La mole, symbole mol, est l'unité de quantité de matière du SI. Une mole contient exactement $6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}$ entités élémentaires. Ce nombre, appelé « nombre d'Avogadro », correspond à la valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro, N_A, lorsqu'elle est exprimée en mol^{-1}.

La quantité de matière, symbole n, d'un système est une représentation du nombre d'entités élémentaires spécifiées. Une entité élémentaire peut être un atome, une molécule, un ion, un électron, ou toute autre particule ou groupement spécifié de particules.

LA CANDELA

La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse, dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{cd}, égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en $lm\ W^{-1}$, unité égale à $cd\ sr\ W^{-1}$, ou $cd\ sr\ kg^{-1} m^{-2} s^3$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h, c et $\Delta\nu_{Cs}$.

II. Équation aux dimensions

1. Définition

On appelle équation aux dimensions l'écriture de la dimension d'une grandeur physique en fonction des sept dimensions de base du SI :

$$\boxed{\dim(G) = L^a M^b T^c I^d \Theta^f N^g J^h}$$

Exemples :

— Si G a la dimension d'une longueur, on notera : $\dim(G) = L$;

— Si la grandeur G est sans dimension (on dit qu'elle est adimensionnée), on notera $\dim(G) = 1$. Par exemple, un angle est défini comme le rapport de la longueur de la corde (une longueur ℓ) divisée par le rayon du cercle (une longueur R) : $\dim(\theta) = \dim\left(\frac{\ell}{R}\right) = \frac{\dim(\ell)}{\dim(R)} = \frac{L}{L} = 1$.

2. Établir une équation aux dimensions

Savoir faire - Établir une équation aux dimensions

1. Exprimer la grandeur dont on cherche la dimension à l'aide d'une formule simple, de la définition, . . . ;
2. Exprimer les dimensions des grandeurs intervenants dans la formule précédente à l'aide des 7 dimensions de base ;
3. Conclure sur la dimension de la grandeur recherchée.

Exercice 1

Énoncé :
1. Établir la dimension d'une force.
2. Établir la dimension, puis l'unité dans le système international du champ de pesanteur terrestre g.
3. Établir la dimension de l'énergie cinétique.
4. Établir la dimension, puis l'unité en fonction des 7 unités de base du SI, d'une pression. Quelle est l'unité usuelle de la pression ?

Correction :
1. D'après le PFD, on sait que $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$. Ainsi, $\dim(\|\overrightarrow{F}\|) = \dim(m) \times \dim(\|\overrightarrow{a}\|) = M.L.T^{-2}$
2. On sait que $\overrightarrow{g} = \dfrac{\overrightarrow{P}}{m}$ donc $\dim(\|\overrightarrow{g}\|) = \dfrac{\dim(\|\overrightarrow{P}\|)}{\dim(m)} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{M} = L.T^{-2}$.
Dans le système international, g est donc en $m.s^{-2}$.
3. On sait que $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$, donc $\dim(\mathcal{E}_c) = \dim(m) \times \dim(v^2) = M.L^2.T^{-2}$.
4. La pression P s'exerçant sur une surface S est reliée en norme à la force de pression $\overrightarrow{F}$ par $P = \dfrac{\|\overrightarrow{F}\|}{S}$ donc $\dim(P) = \dfrac{\dim(\|\overrightarrow{F}\|)}{\dim(S)} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{L^2} = M.L^{-1}.T^{-2}$. L'unité SI est donc en $kg.m^{-1}.s^{-2}$. L'unité usuelle est le bar ou le Pascal Pa.

III. Homogénéité d'une expression

Savoir - Une équation/expression doit toujours être homogène

- Les deux membres de l'égalité $A = B$ ont même dimension, c'est-à-dire $\dim(A) = \dim(B)$;
- Les termes d'une somme ou d'une différence ont une même dimension (on n'ajoute pas des distances avec des masses) ;
- L'argument x des fonctions mathématiques ($\exp(x)$, $\cos(x)$, $\ln(x)$ . . .) est toujours sans dimension, ces fonctions sont elles-mêmes sans dimension ;
- Les deux membres d'une égalité, d'une somme ou d'une différence sont de la même nature scalaire ou vectorielle : $\overrightarrow{\text{vecteur}} = \overrightarrow{\text{vecteur}}$ ou scalaire = scalaire .

Savoir faire - Contrôler l'homogénéité d'une relation littérale

Vous devez prendre l'habitude de CONTRÔLER L'HOMOGÉNÉITÉ DE TOUTES LES RELATIONS LITTÉRALES, avant l'application numérique, c'est-à-dire en l'absence de toute valeur numérique.

Remarques :
— *Une expression* ***non homogène*** *est nécessairement* ***fausse****.*
— *Une expression homogène peut être fausse, mais l'erreur de calcul sera plus excusable.*

Exercice 2

Énoncé : Contrôler l'homogénéité des expressions suivantes. Pour cela, étudier la dimension de chaque terme des sommes/différences et de part et d'autre du signe égal, puis conclure.
1. $c = \lambda T$, avec c la célérité de l'onde, λ la longueur d'onde et T la période
2. Position d'un point au cours d'une chute libre : $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0}{t} + z_0$, avec g le champ de pesanteur, v_0 la vitesse initiale et z_0 l'altitude initiale.
3. $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = F \times v$, avec $\mathcal{E}_c$ l'énergie cinétique, F une force et v une vitesse.
4. L'expression $u_c(t) = E\exp^{-t/\tau}$ où E et u_c sont des tensions électriques et t un temps, est homogène à condition que τ soit homogène à ....
5. $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = E$, où u et E sont des tensions et t et τ des temps, peut-elle être homogène ?
6. $F = mg(1+t)$, où F est une force, m une masse, g le champ de pesanteur terrestre, t un temps, peut-elle être homogène ?

Correction :
1. $\dim(c) = L.T^{-1}$; $\dim(\lambda) = L$; $\dim(T) = T$. Ainsi, on a bien $\dim(c) \neq \dim(\lambda) \times \dim(T)$, la formule n'est pas homogène.
2. $\dim(z(t)) = L$; $\dim(z_0) = L$; $\dim\left(\frac{1}{2}gt^2\right) = L.T^{-2}.T^2 = L$ $\dim\left(\frac{v_0}{t}\right) = \frac{L.T^{-1}}{T} = L.T^{-2}$. Ainsi le dernier terme n'est pas homogène aux autres. Cette formule n'est pas homogène.
3. $\dim(\mathcal{E}_c) = M.L^2.T^{-2}$; $\dim(F) = M.L.T^{-2}$; $\dim(v) = L.T^{-1}$. Ainsi $\dim(\mathcal{E}_c) = \dim(F) \times \dim(v)$. La formule est homogène.
4. L'argument dans l'exponentielle doit être sans dimension : $\dim\left(\frac{t}{\tau}\right) = 1$ donc on doit avoir $\dim(t) = \dim(\tau) = T$. Par ailleurs, $\dim(E) = \dim(u)$ donc la formule est bien homogène si $\dim(\tau) = T$.
5. On a : $\dim\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{\dim(du)}{\dim(dt)} = \dim(u) \times T^{-1}$. De même : $\dim\left(\frac{u}{\tau}\right) = \frac{\dim(u)}{\dim(\tau)} = \dim(u) \times T^{-1}$. Ces deux termes sont homogènes. En revanche : $\dim(E) = \dim(u)$. Ce dernier terme n'est pas homogène avec les deux premiers. l'équation n'est pas homogène.
6. On note immédiatement que la somme $1+t$ n'est pas une somme homogène : $\dim(1) = 1$ et $\dim(t) = T$, donc la formule n'est pas homogène.

IV. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet de contrôler l'homogénéité d'une expression, elle permet également de déterminer ou retrouver l'expression d'une grandeur.
Une grandeur X susceptible de dépendre d'un certain nombre de grandeurs A, B et C caractéristiques du problème et dimensionnellement indépendantes, peut très souvent se mettre sous la forme :

$$X = k \times A^\alpha B^\beta C^\gamma$$

où k est un nombre sans dimension, et où les exposants α, β et γ peuvent être déterminés par analyse dimensionnelle.

Savoir faire - Déterminer une relation par analyse dimensionnelle

1. Identifier les grandeurs A, B, C caractéristiques du problème étudié dont peut dépendre la grandeur X recherchée.
2. Exprimer la grandeur recherchée sous la forme :

$$X = k \times A^\alpha B^\beta C^\gamma$$

avec k est un nombre sans dimension.
3. Écrire l'équation aux dimensions :

$$\dim(X) = (\dim(A))^\alpha \times (\dim(B))^\beta \times (\dim(C))^\gamma$$

4. Exprimer les dimensions de A, B, C et X en fonction des 7 dimensions de base du SI.
5. En égalisant les exposants de chaque dimension de base du SI présents à gauche et à droite, établir le système d'équations vérifié par α, β, γ et le résoudre.
6. Conclure sur l'expression de X.

Exercice 3

Énoncé : Un pendule est constitué d'une ficelle de longueur ℓ à laquelle est attachée une masse m. La ficelle est fixée au plafond et la masse est supposée osciller sans frottement dans le champ de pesanteur terrestre d'intensité g.
1. Quels sont les paramètres pertinents du problème ?
2. Exprimer la grandeur recherchée en fonction des paramètres identifiés précédemment et d'exposants.
3. Après avoir déterminé les dimensions des différentes grandeurs, écrire l'équation aux dimensions.
4. En déduire le système d'équations vérifié par les exposants introduits précédemment.
5. Conclusion sur l'expression de T.

Correction :
1. ℓ , m et g.
2. $T = k \times \ell^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}$
3.$\dim(T) = T$; $\dim(\ell) = L$; $\dim(m) = M$; $\dim(g) = L.T^{-2}$.
donc : $\dim(T) = (\dim(\ell))^{\alpha} \times (\dim(m))^{\beta} \times (\dim(g))^{\gamma} \Rightarrow T = L^{\alpha} M^{\beta} (L.T^{-2})^{\gamma} \Rightarrow T = L^{\alpha+\gamma} M^{\beta} T^{-2\gamma}$
4. Le système d'équations est :

$$\begin{cases} -2\gamma = 1 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\dfrac{1}{2} \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

5. $\boxed{T = k \times \sqrt{\dfrac{\ell}{g}}}$. Remarques : on verra en mécanique que $k = 2\pi$.

Chapitre 0 - Analyse dimensionnelle		
Savoir	☺	☹
- Unités et dimensions du système international (I.1)		
- Préfixes et unités du femto au tera (I.2)		
- Une équation/expression doit toujours être homogène (III.)		
Savoir faire		
- Établir une équation aux dimensions (II.2)		
- Contrôler l'homogénéité d'une relation littérale (III.)		
- Déterminer une relation par analyse dimensionnelle (IV.)		