

I] Généralités sur les équations différentielles1. Définition

Une **équation différentielle ordinaire** est une **équation** reliant une **fonction inconnue** y (ou θ , ou u , ou n'importe quel autre nom) à **ses dérivées par rapport à son unique variable** (souvent une variable d'espace x ou de temps t).

L'**ordre** d'une équation différentielle est le **degré le plus élevé des dérivées** qui interviennent dans son écriture.

Une équation différentielle seule donne **une famille de solutions possibles**, mais que la description du problème physique n'admet qu'une solution unique. On devra donc toujours **adjoindre à une équation différentielle des conditions initiales** (si la variable est le temps) **ou aux limites** (si la variable est l'espace). **Il faudra le même nombre de conditions que l'ordre de l'équation différentielle.**

2. Notion de linéarité

Une équation est **linéaire** si, $\forall y_1, y_2$ solutions de l'équation, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$, alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de l'équation.

On comprend donc qu'il s'agit d'équations qui ne font intervenir que des sommes et des multiplications par des constantes.

Exemples :

- $\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0$ est linéaire ;
- $\frac{d^2y}{dt^2} + \kappa t y = \ell_0$ est linéaire ;
- $\frac{dy}{dt} = k y^2$ n'est pas linéaire ;
- $\frac{dy}{dt} + \log(y) = A t^2$ n'est pas linéaire.

3. Forme canonique

On écrit les équations différentielles sous **une forme canonique** en **égalisant la fonction inconnue et ses dérivées aux autres termes de l'équation** :

$$\alpha_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y = f(t) \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{d^i y}{dt^i} = f(t)$$

où le membre de gauche représente physiquement la **réponse du système** et le membre de droite le **forçage extérieur imposé au système**. Les α_i sont alors appelés coefficients de l'équation différentielle.

4. Equation homogène

On nomme **équation homogène** associée l'équation « sans second membre » :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{d^i y}{dx^i} = 0$$

II] Méthode générale de résolution des équations différentielles

La résolution d'une équation différentielle linéaire passe par **4 étapes** :

- **Etape n°1 : Résolution de l'équation homogène** associée à l'équation différentielle pour obtenir une première famille de solution $y_H(t)$ de cette équation homogène. *(A ce stade, on introduit une ou des constante(s) d'intégration non fixée(s).)*
- **Etape n°2 : Recherche d'une solution particulière $y_P(t)$** de l'équation complète. *(On prendra le cas simple d'un second membre constant $f(t) = f_0$ poussant à la recherche d'une solution particulière constante identifiable facilement car ses dérivées temporelles sont nulles.)*
- **Etape n°3 : Construction de l'ensemble des solutions** de l'équation différentielle en sommant la famille de solutions de l'équation homogène à la solution particulière. Si la variable est le temps : $y(t) = y_H(t) + y_P$.
- **Etape n°4 : Détermination de la ou les constante(s) d'intégration** en appliquant les conditions initiales / aux limites à la **solution générale** et en déduire la solution du problème physique.

III] Solution des équations différentielles linéaires homogènes1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Il s'agit d'une équation du type :

$$a \frac{dy}{dt} + by = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

Pour une équation linéaire du premier ordre, l'équation homogène a pour solution des fonctions de la forme :

$$y(t) = Ae^{-\frac{b}{a}t} \quad A \in \mathbb{R}$$

En physique, on pose usuellement $\tau = a/b$, ce qui conduit à :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad \text{de solutions} \quad y(t) = Ae^{-t/\tau} \quad A \in \mathbb{R}$$

2. Équations différentielles linéaires d'oscillateur harmonique (ordre 2 avec dérivée première nulle)

Il s'agit ici d'équations du type :

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + cy = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0, \quad c \neq 0, \quad \frac{c}{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$$

Dans ce cas les solutions de l'équation s'écrivent :

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{ou} \quad y(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

- ω_0 est appelé **pulsation propre** (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

Si $c/a < 0$, alors on écrira

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \beta^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$$

ce qui n'oscille pas du tout ! Il faut donc toujours vérifier scrupuleusement le signe des différents coefficients dans la solution avant de reconnaître un oscillateur harmonique. Si le signe n'est pas connu, il faudra réaliser une disjonction de cas.

3. Équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Il s'agit ici d'équations du type :

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$$

Que l'on écrit en physique sous deux formes :

$$(F1): \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{b}{2}$$

$$(F2): \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{c}{a}}$$

- λ est appelé **facteur d'amortissement** (son unité dépend du système étudié)
- Q est appelé **facteur de qualité** (son unité dépend du système étudié)

- i** \Leftrightarrow la dimension de ω_0 est T^{-1} ; son unité usuelle est le $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, comme pour un oscillateur harmonique ;
- \Leftrightarrow Q est sans dimension ; λ a pour dimension T^{-1} et pour unité usuelle la s^{-1} ;
- \Leftrightarrow travailler avec le facteur d'amortissement est souvent plus simple dans les calculs et dans l'interprétation du régime transitoire ; cependant c'est le facteur de qualité qui est plus commode dans l'analyse des régimes sinusoïdaux forcés¹. Il est donc recommandé de savoir utiliser les deux. Remarquons d'ailleurs que, par définition

$$\frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$$

on peut donc facilement passer de l'un à l'autre ;

Dans la suite, on développe les expressions des solutions pour la forme n°1 de l'équation différentielle défini ci-dessus.

Le développement de la forme n°2 sera effectué dans le chapitre sur l'oscillateur amorti.

La forme des solutions dépendent du signe du discriminant du polynôme caractéristique de l'équation différentielle défini par :

$$(PC) : r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant Δ est calculé selon :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

- Si $\Delta > 0$: Les racines du polynôme caractéristiques sont réelles.

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = 0$: La racine est double et réelle.

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda$$

$$y(t) = (At + B)e^{rt} \quad \text{avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

Il vient donc :

$$y(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$

- Si $\Delta < 0$: Les racines sont complexes et la solution est oscillante.

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2\lambda \pm 2j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}{2} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm j\Omega$$

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ est appelé la **pseudo pulsation**.

Les solutions s'écrivent alors :

$$y(t) = e^{\text{Re}(r_1)t} [A \cos(\text{Im}(r_1)t) + B \sin(\text{Im}(r_1)t)] \quad \text{avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

Il vient donc :

$$y(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \quad \text{avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

Que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$y(t) = Y e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{avec } Y \text{ et } \varphi \in \mathbb{R}$$

IV] Solutions particulières dans le cas d'un second membre constant

Pour trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire, on ajoute à l'ensemble des solutions y_H de l'équation homogène à une solution particulière y_P , il faut donc trouver cette dernière.

Dans le cas d'un second membre constant $f(t) = f_0$, l'équation s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = f_0$$

Comme le second membre est constant, on cherche **une solution particulière y_P comme une fonction constante du temps** pour trouver la valeur de la constante qui convient, on l'injecte dans l'équation différentielle puisque $y_P = \text{Cte}$, les dérivées s'annulent et il reste :

$$a_0 y_P(t) = f_0 \quad \Rightarrow \quad y_P(t) = \frac{f_0}{a_0}$$

Ce qui conduit à la solution générale :

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = y_H(t) + \frac{f_0}{a_0}$$

V] Exercices d'entraînement

Pour chaque système décrit ci-dessous :

- Mettre l'équation différentielle sous forme canonique si nécessaire.
- Résoudre l'équation différentielle.
- Appliquer la (les) condition(s) initiale(s) à la solution.
- Tracer graphiquement l'allure de solution générale.

Exercice 1 : Réaction chimique avec une cinétique d'ordre 1

On étudie la décomposition d'un composé A selon la réaction : $A \rightarrow$ produits, de constante de vitesse k (en s^{-1}).

$$\text{Équation différentielle : } \frac{d[A]}{dt} = -k [A]$$

$$\text{Condition initiale : } [A](t = 0) = [A]_0$$

Exercice 2 : Chauffage d'un solide (puissance thermique constante)

Un solide de masse m (kg) à la température T (en K) reçoit une puissance thermique constante P (en W) (par exemple par effet Joule). Sa capacité thermique vaut C (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) et il échange par convection à travers la surface S (en m^2) de l'énergie thermique proportionnellement à sa différence de température avec le milieu extérieur à la température T_e (en K) avec un coefficient h (en $W.m^{-2}.K^{-1}$).

$$\text{Équation différentielle : } mc \frac{dT}{dt} + hS(T - T_e) = P$$

$$\text{Condition initiale : } T(t = 0) = T_i$$

Exercice 3 Circuit RC soumis à une rampe de tension

Un condensateur de capacité C (en F) est branché en série avec un conducteur ohmique de résistance R (en Ω) et un générateur idéal de tension qui délivre une rampe de tension $E(t) = \alpha t$ pour $t > 0$.

$$\text{Équation différentielle : } RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E(t)$$

$$\text{Conditions initiales : } u_c(t = 0) = 0$$

Indication : On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $u_p(t) = bt + c$, avec b et c $\in \mathbb{R}$ des coefficients à déterminer.

Exercice 4 : Petites oscillations d'un pendule simple

Un pendule simple de masse m (en kg) et de longueur l (en m) oscille avec une amplitude faible de sorte que θ l'angle avec la verticale soit faible devant 1 radian.

$$\text{Équation différentielle : } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\text{Conditions initiales : } \theta(t = 0) = 0, \frac{d\theta}{dt}(t = 0) = \omega_i$$

Exercice 5 : Circuit LC soumis à un échelon de tension

Un condensateur de capacité C (en F) et une bobine d'inductance L (en H) sont en série avec un générateur idéal de tension. Le générateur applique brutalement une tension constante $U(t > 0) = E$.

$$\text{Équation différentielle : } L \frac{d^2q}{dt^2} + Cq = E$$

$$\text{Conditions initiales : } q(t = 0) = q_0 \text{ et } i(t = 0) = 0$$

Exercice 6 : Système masse ressort amorti par frottement fluide

Une masse m (en kg) est accrochée verticalement à un ressort de raideur K (en $N.m^{-1}$) la masse est plongée dans un fluide de sorte qu'elle subissent un frottement visqueux caractérisé par un coefficient λ (en $N.m.s^{-1}$).

$$\text{Équation différentielle : } m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + Kx = mg + Kl_0$$

$$\text{Conditions initiales : } x(t = 0) = x_0 \text{ et } \frac{dx}{dt}(t = 0) = 0$$