Introduction

Vidéo introductive : On prend un dos d'âne à 170 km/h (Chaine Youtube : Vilebrequin)

Quelle analogie peut-on développer entre un oscillateur amorti en régime libre et la situation proposée dans la vidéo ?

Quelles sont les limites de cette analogie ?

Quelles sont les caractéristiques du système réel non pris en compte par la modélisation idéal de l'oscillateur amorti ?

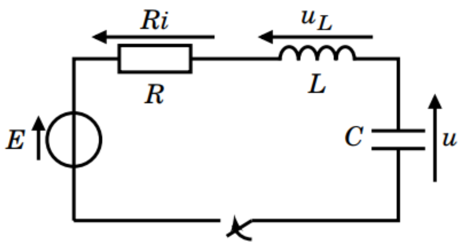
Savoir-faire :

- ➔ Etablir et résoudre l'équation différentielle pour un système du 2ème ordre.
- ➔ Identifier et évaluer des temps caractéristiques, pulsations et facteurs de qualité.
- ➔ Tracer l'allure d'un régime transitoire amorti.
- ➔ Réaliser des bilans énergétiques.

I] Un exemple d'oscillateur amorti : Le circuit RLC série

1. Mise en équation

On considère le circuit ci-dessous, avec un condensateur initialement déchargé et un interrupteur ouvert pour $t < 0$.
A $t = 0$, on ferme l'interrupteur, écrivons les équations du circuit :



$$\begin{cases} Ri + u_L + u - E = 0 & (1) \\ i = C\frac{du}{dt} & (2) \\ u_L = L\frac{di}{dt} & (3) \end{cases} \Rightarrow LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = E$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{1}{LC}E}$$

2. Analyse des conditions initiales

Le condensateur est initialement déchargé et aucun courant ne circule avant fermeture de l'interrupteur :

$$u(t < 0) = 0 \; et \; i(t < 0) = 0$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et de l'intensité à travers une bobine :

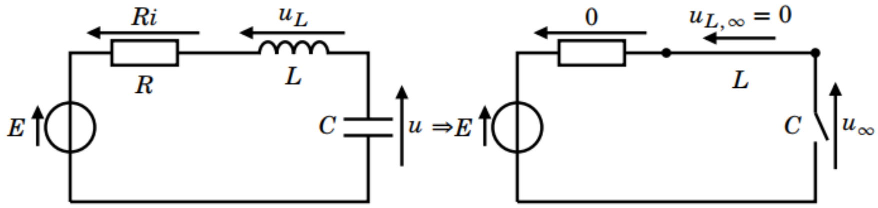
$$u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = 0 \; et \; i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$$

On en déduit à l'aide de (1) et (2) que :

$$u_L(t = 0^+) = E \; et \; \frac{du}{dt}(t = 0^+) = 0$$

3. Analyse du régime stationnaire

Si on atteint un régime permanent stationnaire, on peut l'analyser a priori à l'aide d'un circuit équivalent :



D'où u(t→∞) = E.

En régime stationnaire, la bobine ne voit aucune tension à ses bornes puisque i est constante. Le condensateur chargé oppose alors une tension E au générateur, ne laissant aucune tension aux bornes de la résistance, d'où un courant nul dans le circuit.

II] Équation différentielle du 2ème ordre : forme canonique

1. Forme canonique

On appelle **oscillateur amorti** un système décrit par une équation différentielle linéaire d'ordre deux s'écrivant sous une des formes canoniques ci-dessous :

$$(F1): \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = f(t)} \quad ou \quad (F2): \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = f(t)}$$

- $\omega_0 > 0$ est la **pulsation propre.**
- $\lambda > 0$ est le **facteur d'amortissement.**
- **Q** > 0 est le **facteur de qualité**.
- ***f(t)*** est le **forçage extérieur**.

On peut identifier les paramètres des formes canoniques pour l'oscillateur électrique :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \; ; \; \boxed{Q = \omega_0\frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} \; ; \; \boxed{\lambda = \frac{R}{2L}}$$

2. Démarche de résolution

On cherche les solutions de l'équation sous la forme :

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + u_p \quad avec\ A\ et\ B \in \mathbb{R}$$

où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique de l'équation homogène :

$$P(r) = r^2 + 2\lambda\, r + \omega_0^2$$

de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) = 4\omega_0^2(\frac{1}{4Q^2} - 1)$$

Nous allons détailler le sens physique des différents cas pour le signe de Δ.

III] Régimes transitoires possibles

1. Amortissement faible : régime pseudopériodique

a. Définition

Si l'amortissement est faible (R faible, donc λ faible ou Q élevé), on se retrouve dans le cas $\Delta < 0$:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \boxed{\lambda < \omega_0 \ \ ou \ \boldsymbol{Q} > \frac{1}{2}}$$

b. Solutions

Dans ce cas, les racines du polynôme caractéristique s'écrivent :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2\lambda \ \pm 2j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}{2} = -\lambda \ \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm j\omega_P = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_P$$

Avec $\omega_P = \frac{2\pi}{T_P}$ la pseudo-pulsation et $\boldsymbol{T_P}$ la pseudo-période.

On en déduit la forme des solutions (équation homogène + solution particulière constante) :

$$\boxed{u(t) = e^{-\lambda t}\big(\mathrm{A}cos(\omega_P\, t) + \mathrm{B}sin(\omega_P\, t)\big) + E} \ \text{avec A et B} \in \mathbb{R}$$

Ou encore :

$$\boxed{u(t) = \mathrm{Y}e^{-\lambda t}cos(\omega_P t + \varphi) + E} \ \text{avec Y et } \varphi \in \mathbb{R}$$

On constate un amortissement exponentiel, d'une durée caractéristique τ_a :

$$e^{-\frac{t}{\tau_a}} = e^{-\lambda t} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{\tau_a} = \lambda \ \Leftrightarrow \ \tau_a = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

On peut alors tracer l'allure de la solution :

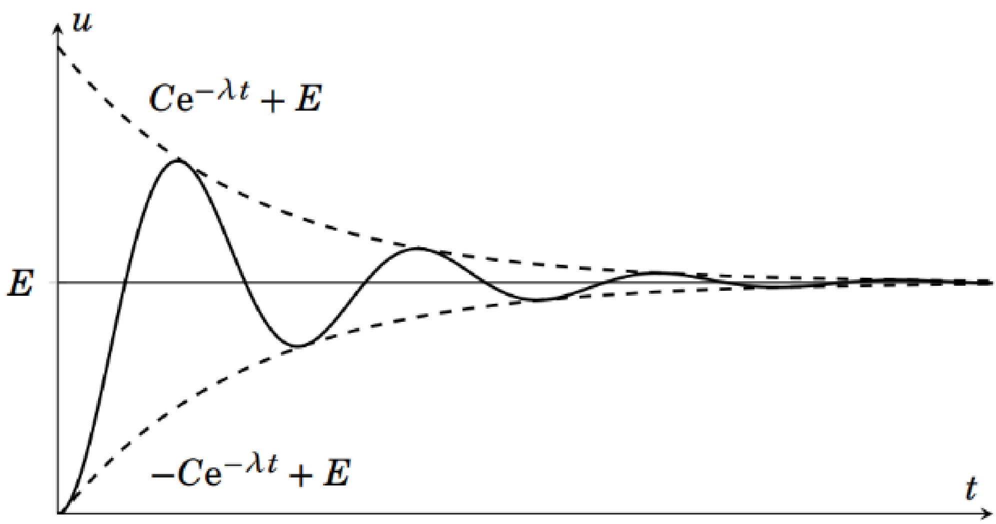


Illustration du régime pseudo-périodique

c. Propriétés, commentaires et interprétation

• **Propriété n°1 : Interprétation physique du facteur de qualité pour un amortissement faible.**

Dans le cas $Q \gg 1$, les calculs précédents conduisent à :

$$\frac{T_P}{\tau_a} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \times \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}} \Leftrightarrow \pi\tau_a = \frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2} \times T_P = Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \times T_P \approx QT_P$$

$$Q \approx \frac{3\tau_a}{T_P}$$

Une fois une durée $3\tau_a \simeq \pi\tau_a$ écoulée, on sait que le régime transitoire est terminé, on peut estimer l'ordre de grandeur de Q en comptant le nombre de pseudo-périodes visibles lors du transitoire.

Cette propriété donne une **interprétation physique temporelle du facteur de qualité**.

• **Propriété n°2 : Pseudo-période approchée dans le cas d'un amortissement faible.**

Si $\lambda \ll \omega_0$ ou $Q \gg 1/2$, on peut écrire :

$$\omega_P = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$$

D'où une forme simplifiée de la solution :

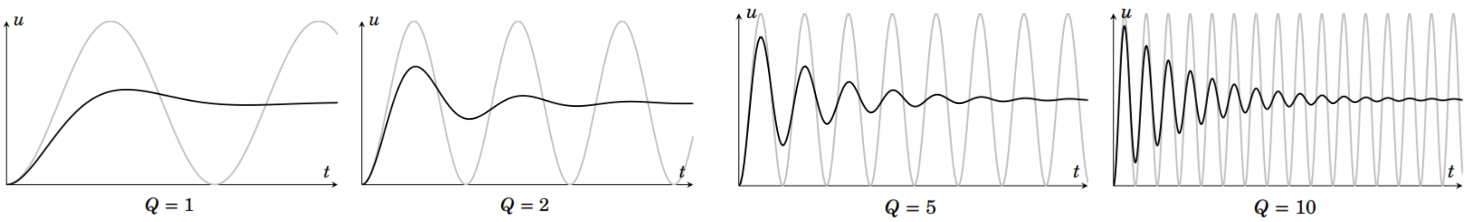
$$u(t) = Y e^{\frac{-t}{\tau_a}} \cos(\omega_0 t + \varphi) + E \quad \text{avec} \quad \tau_a = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

Cette solution ressemble à un oscillateur harmonique (car elle oscille à sa pulsation propre) dont l'amplitude varie très lentement par rapport à la période des oscillations.

Un facteur de qualité élevé correspond donc à des oscillations de « bonne qualité » au sens où elles sont très proches d'oscillations harmoniques.

Bilan : Les deux propriétés (Q comme nombre d'oscillations et $\omega_P \simeq \omega_0$) reposent sur l'hypothèse $Q > 1$, en pratique cette hypothèse est rapidement vérifiée (cf. tableau).

Q	$1/2$	1	2	3	5	10
$\sqrt{1-1/4Q^2}$	0	$0,866$	$0,968$	$0,986$	$0,995$	$0,999$



Evolution de l'allure du signal en fonction du facteur de qualité Q

2. Amortissement fort : régime apériodique

a. Définition

Si l'amortissement est fort (R élevé, donc λ élevé ou Q faible), on se retrouve dans le cas $\Delta > 0$:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda > \omega_0 \ ou \ Q < \frac{1}{2}}$$

b. Solutions

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

On en déduit la forme des solutions de l'équation :

$$\boxed{u(t) = \mathrm{A}e^{r_1 t} + \mathrm{B}e^{r_2 t} + E} \text{ avec A et B } \in \mathbb{R}$$

Cette solution fait apparaître 2 temps caractéristiques $\tau_1 = -\frac{1}{r_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{r_2}$ l'allure va ressembler à la réponse d'un premier mais le début sera différent en fonction des conditions initiales.

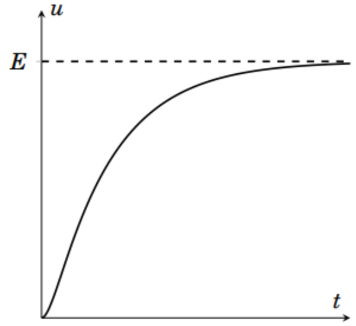


Illustration du régime apériodique

3. Cas limite : régime apériodique critique

Ce cas est inexistant en pratique, il s'agit du cas où :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \omega_0 \ ou \ Q = \frac{1}{2}}$$

Dans ce cas, les racines du polynôme caractéristique s'écrivent :

$$r_1 = r_2 = -\omega_0$$

Les solutions sont de la forme :

$$\boxed{u(t) = (\mathrm{A}t + \mathrm{B})e^{-\omega_0 t} + E} = (\mathrm{A}t + \mathrm{B})e^{-\frac{t}{\tau_c}} + E \quad , \tau_c = \frac{-1}{\omega_0}$$

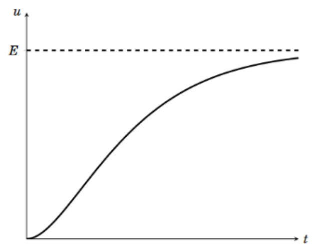


Illustration du régime critique

On peut montrer par le calcul que le régime critique est le régime apériodique s'amortissant le plus vite.

Si on cherche un amortissement efficace on aura tout intérêt à dimensionner le système pour se rapprocher de $Q = 1/2$. (*En pratique, des régimes pseudo-périodiques proches du critiques peuvent être encore plus rapides si on se fixe comme critère que le régime permanent est atteint lorsque la valeur de signal est à 99% du régime stationnaire*.)

Régime	Pseudo-périodique	Apériodique	Critique
Δ	< 0	> 0	$= 0$
Q	$> \frac{1}{2}$	$< \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\lambda = \omega_0/2Q$	$< \omega_0$	$> \omega_0$	ω_0
racines $r_\pm$ du P.C	$-\lambda \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\omega_0/2Q \pm \mathrm{i}\omega_P$	$-1/\tau_\pm$, $\tau_+ > \tau_-$	$-\omega_0$
solution de l'éq. hom.	$Ce^{-\lambda t}\cos(\omega_P t + \varphi)$	$A_+ \mathrm{e}^{-t/\tau_+} + A_- \mathrm{e}^{-t/\tau_-}$	$(At + B)\,\mathrm{e}^{-t/\tau_c}$
temps carac. amortissement	$\tau_a = 1/\lambda = 2Q/\omega_0$	τ_+ (à recalculer)	$\tau_c = 1/\omega_0$
temps carac. autre	$T_P = 2\pi/\omega_P$	τ_- (à recalculer)	-

Tableau récapitulatif des différents régimes

IV] Bilan de puissance

Comme pour le circuit RC, pour faire un bilan de puissance, reprenons l'équation issue de la loi de maille et multiplions cette équation par l'intensité dans le circuit i :

$$u + Ri + u_L = E$$

$$u \times i + Ri \times i + u_L \times i = E \times i$$

$$u \times C\frac{du}{dt} + Ri^2 + L\frac{di}{dt} \times i = E \times i$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Cu^2) + Ri^2 + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2) = Ei}$$

On peut interpréter chaque terme : la puissance fournie par le générateur est en partie reçue par l'ensemble {condensateur + bobine} qui les stockent et en partie dissipée par la résistance :

$$\frac{d}{dt}(E_C + E_L) = Ei - Ri^2 < Ei$$

V] Analogie électrocinétique et mécanique

Les solutions des équations et leurs propriétés mise en évidence pour l'oscillateur amorti électrique sont aussi valables pour tous les oscillateurs amortis.

En particulier le cas de l'oscillateur amorti mécanique que l'on peut facilement réaliser en considérant un système composé d'une masse $\boldsymbol{m}$ accrochée à un ressort de raideur $\boldsymbol{k}$ et soumise à des frottements fluides dont la résultante est proportionnelle et opposée à la vitesse de la masse avec un coefficient $\boldsymbol{\alpha}$.

Ce système est caractérisé par une équation différentielle portant sur la position de la masse x :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = f(t)$$

Grandeur	Oscillateur mécanique	Circuit
Grandeurs cinématiques	$x, \dot{x}$	$q, i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$
Inertie	m	L
Coefficient de rappel	k	$1/C$
Coefficient de frottement	α	R
Forçage	$k\ell_0/m$	E/LC
Équation différentielle	$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = k\ell_0$	$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = E$
Pulsation propre	$\sqrt{k/m}$	$1/\sqrt{LC}$
Facteur de qualité	$\sqrt{km}/\alpha$	$1/R\sqrt{L/C}$
Régime stationnaire	ℓ_0	E

Analogie entre l'oscillateur amorti mécanique et l'oscillateur amorti électrique