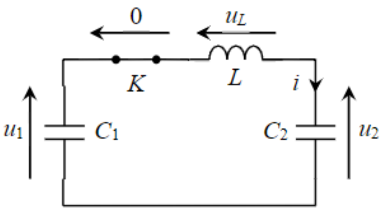
☐ Exercice 10.1. Circuit LC ★

1. On complète les notations du circuit, pour $t > 0$, sur le schéma ci-contre.



Loi des mailles : $u_2 + u_L - u_1 = 0$.

De plus tous les dipôles sont parcourus par le même courant i, d'où les relations :

$i = C_2 \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$ (convention récepteur) ; $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (idem) ;

$i = -C_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ (convention générateur). On souhaite éliminer toutes les variables sauf i : on peut déjà remplacer u_L par $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ dans l'équation issue de la loi des mailles. Pour éliminer u_1 et u_2 dans cette équation, on commence par la dériver, puis on utilise les relations des condensateurs :

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \frac{i}{C_2} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} - \left(-\frac{i}{C_1}\right) = 0 \text{ d'où finalement } \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i = 0}.$$

⇨ *Méthode 5.1*

2. Continuité du courant dans la bobine : $i(0^+) = i(0^-)$ soit $\boxed{i(0^+) = 0}$. Continuité des tensions des condensateurs : $u_1(0^+) = u_1(0^-) = \dfrac{q_0}{C_1}$ et $u_2(0^+) = u_2(0^-) = 0$ (initialement déchargé).

Si on choisit au départ d'orienter la tension u_1 dans l'autre sens, le condensateur de gauche serait alors lui aussi en convention récepteur $\left(i = C_1\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\right)$ mais en revanche on devrait écrire $u_1(0^-) = -\dfrac{q_0}{C_1}$ car q_0 est portée par l'armature supérieure. On retrouve alors les mêmes résultats.

La loi des mailles à $t = 0^+$ donne alors : $\dfrac{q_0}{C_1} + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) + 0 = 0$ d'où $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{q_0}{LC_1}}$.

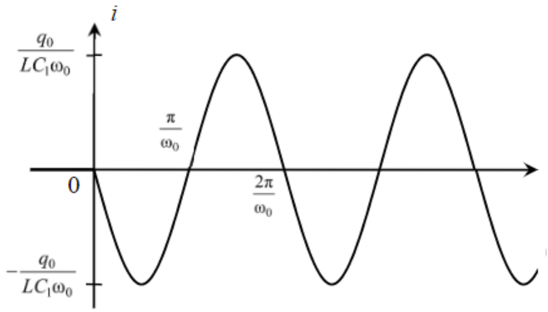
3. Solution : $i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ en posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)}}$.

À $t = 0^+$: $i(0^+) = A = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = B\omega_0 = -\dfrac{q_0}{LC_1}$. Donc $\boxed{i(t) = -\dfrac{q_0}{LC_1\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$.

⇨ *Méthode 5.4*

4. On doit bien faire apparaître les deux conditions initiales sur la courbe : elle part donc de l'origine, et la pente initiale est négative.

Ensuite l'intensité s'annule à chaque demi-période, et l'amplitude des oscillations est $\dfrac{q_0}{LC_1\omega_0}$.



☐ Exercice 10.2. Circuit RLC soumis a un échelon de tension ★

1. Schéma obligatoire, avec source de tension égale à E, et flèches de tension sur les composants. Même démarche que dans l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}
& u_L + u_R + u_C = E \\
\Rightarrow & L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = E \\
\Rightarrow & L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_C}{dt}\right) + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \\
\Rightarrow & LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \\
\Rightarrow & \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}E \\
\Rightarrow & \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E
\end{aligned}$$

avec par identification $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$ donc $Q = \dfrac{L}{R}\omega_0$ soit après remplacement : $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$.

2. On trouve $Q = 10$ et $\omega_0 = 10^5$ rad/s.

3. — **Solution particulière** : on la suppose constante, donc il reste $\omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$, donc $u_{C_P} = E$.

— **Solution de l'équation homogène** : identique à l'exercice précédent, on a $u_{C_H}(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))e^{-t/\tau}$ avec

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

Ici $Q = 10$, donc $\Omega = \omega 0_{\times} 0,9987 \simeq \omega_0$.

— **Solution totale** :

$$\boxed{u_C(t) = E + (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\, e^{-t/\tau}}$$

— **Détermination des conditions initiales** (pas vraiment demandé) :

Pour $t < 0$ on a $u_C = 0$ (condensateur non chargé) et $i = 0$ (générateur éteint).

Donc $u_C(0^-) = 0$ et $i(0^-) = 0$.

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.

Et par continuité de l'intensité traversant une bobine : $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Donc $\frac{du_C}{dt}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = 0$.

— **Utilisation CI 1** : $u_C(0) = 0$.

D'après la solution : $u_C(0) = A + E$.

Donc $\boxed{A = E}$.

— **Utilisation CI 2** : $\frac{du_C}{dt}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = 0$.

Il faut dériver la solution, c'est la même chose que dans l'exercice précédent car E est une constante, donc on obtient : $\frac{du_C}{dt}(0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega$.

Ceci doit être nul, donc on en déduit que $\boxed{B = \frac{A}{\tau\Omega} = \frac{E}{\tau\Omega}}$.

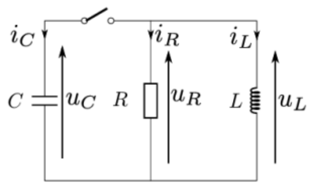
Ici on a $\Omega \simeq \omega_0$, donc $B = -E\frac{\omega_0/2Q}{\Omega} = -\frac{E}{2Q}$.

Finalement :

$$\boxed{u_C(t) = E - E\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{2Q}\sin(\Omega t)\right) e^{-t/\tau}}$$

□ Exercice 10.3. Circuit RLC parallèle ★★

Schéma obligatoire avec convention récepteur pour tous les récepteurs :



1. Suite d'étapes :

$$ic + iL + iR = 0 \text{ (loi des nœuds)}$$

$$C\frac{du_c}{dt} + i_L + \frac{u_R}{R} = 0 \text{ (loi d'Ohm et loi condensateur)}$$

$$C\frac{du_c}{dt} + i_L + \frac{u_c}{R} = 0$$

$$C\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} + \frac{d}{dt}\frac{u_c}{R} = 0 \text{ (on dérive tout par rapport au temps)}$$

$$C\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{u_L}{L} + \frac{d}{dt}\frac{u_c}{R} = 0 \text{ (loi bobine)}$$

$$C\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{u_c}{L} + \frac{d}{dt}\frac{u_c}{R} = 0$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$$

avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$. (on remarque que Q à l'expression inverse de celle pour le RLC série !)

2. — **Instant initial** ($t = 0^+$) :

Seules deux grandeurs sont continues : $u_C(t)$ et $i_L(t)$.

On sait que $u_C(0^-) = U_0$ et $i_L(0^-) = 0$.

On a donc $\boxed{u_C(0^+) = U_0}$ et $\boxed{i_L(0^+) = 0}$.

— Tout est en dérivation donc quel que soit t on a $u_R(t) = u_L(t) = u_C(t)$.

En particulier : $\boxed{u_R(0^+) = u_L(0^+) = u_C(0^+) = U_0}$.

Donc $\boxed{i_R(0^+) = \frac{u_R(0^+)}{R} = \frac{U_0}{R}}$

– Loi des nœuds appliquée en particulier à $t = 0^+$: $i_L(0^+) + i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0$,

donc $\boxed{i_C(0^+) = i_R(0^+) i_L(0^+) = \frac{U_0}{R}}$

3. Le régime est critique pour $Q = 1/2$, donc pour $R\sqrt{\frac{C}{L}} = 1/2$, donc pour $\boxed{R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = 250\Omega}$

4. Ici $Q = 1/2$: le discriminant est nul.

L'équation n'a pas de second membre, donc la solution particulière est nulle et la forme générale des solutions est

$$\boxed{u_C(t) = (At + B)e^{rt}}$$

Pour trouver r on cherche la racine de l'équation caractéristique : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ .On a donc $r = -\omega_0$.

Condition initiale 1 : $u_C(0^+) = U_0$.
D'après la solution $u_C(0) = B$, donc $B = U_0$.

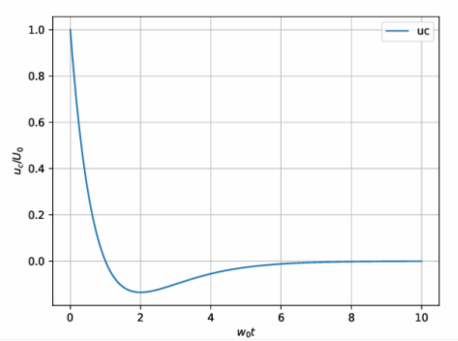
Condition initiale 2 : $\dfrac{du_C(0^+)}{dt} = i_C(0^+) = -\dfrac{U_0}{RC}$

D'après la solution $\dfrac{du_C}{dt} = Ae^{-\omega_0 t} + (At + B)(-\omega_0)e^{-\omega_0 t}$, donc $\dfrac{du_C}{dt}(0) = A - \omega_0 B$.

On a donc $A - \omega_0 B = -\dfrac{U_0}{RC}$, d'où $A = \omega_0 U_0 - \dfrac{U_0}{RC}$

Finalement :

$$\boxed{u_C(t) = U_0\left[\left(\omega_0 - \frac{1}{RC}\right)t + 1\right]e^{-\omega_0 t}}$$



☐ Exercice 10.4. Méthode du décrément logarithmique ★★

1 • **Équation différentielle :** L'équation différentielle régissant l'évolution de u s'écrit (cf. cours)

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

• **Forme des solutions :** L'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à chercher. En régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$), les racines du polynôme caractéristique s'écrivent

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm \mathrm{i}\omega$$

avec τ le temps d'amortissement et ω la pseudo-pulsation. On a ainsi

$$\boxed{\tau = 2RC \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2}{4}\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,.}$$

On en déduit la forme des solutions,

$$u(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

> *Rappelons que l'écriture $U_0\cos(\omega t + \varphi)$ est exactement équivalente à $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, on peut utiliser indifféremment l'une et l'autre ... même si la forme en cos + sin est généralement plus simple pour exploiter les conditions initiales, comme nous allons le voir juste après ☺*

• **Recherche des conditions initiales :** le circuit est en régime permanent à l'instant $t = 0^-$, où le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil. D'après la loi des mailles,

$$E = \cancel{u_L(0^-)} + u(0^-) + \cancel{Ri(0^-)} \qquad \text{soit} \qquad u(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{condensateur}}}{=} u(0^-) = E\,.$$

Par ailleurs,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{1}{C}i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{bobine}}}{=} i(0^-) = 0\,.$$

• **Détermination des constantes :** d'une part,

$$u(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} E \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} U_0\cos\varphi\,.$$

et d'autre part la dérivée s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\omega U_0\sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - \frac{1}{\tau}U_0\cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

si bien que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} -\omega U_0\sin\varphi - \frac{1}{\tau}U_0\cos\varphi\,.$$

On en déduit

$$-\omega U_0\sin\varphi - \frac{1}{\tau}E = 0 \qquad \text{soit} \qquad -\omega E\tan\varphi - \frac{1}{\tau}E = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \tan\varphi = -\frac{1}{\omega\tau}\,.$$

Cette équation admet comme solutions

$$\varphi = -\arctan\frac{1}{\omega\tau} + k\pi = \arctan(\omega\tau) - \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{soit} \qquad \varphi = \arctan(\omega\tau) + \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi\,.$$

On utilise la relation $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Or l'amplitude U_0 est positive par convention, donc $\cos\varphi > 0$ et on préfère se restreindre à l'intervalle $]-\pi,\pi]$ pour déterminer φ. On en déduit que la solution à retenir est celle comprise entre $-\pi/2$ et 0, soit

$$\varphi = \arctan\omega\tau - \frac{\pi}{2}\,.$$

et on en déduit finalement

$$\boxed{U_0 = E\cos\varphi = E\sin(\arctan(\omega\tau))\,.}$$

On constate ici que la méthode « amplitude et phase » est très peu adaptée pour exploiter les conditions initiales : la difficulté vient du fait que plusieurs angles ont le même sinus, et qu'il faut raisonner sur le signe du cosinus pour trouver le bon.

2 Par définition de la pseudo-période, $T = 2\pi/\omega$

$$u(t+T) = U_0\cos(\omega(t+T)+\varphi)\,\mathrm{e}^{-(t+T)/\tau} = U_0\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{e}^{-(t+T)/\tau}\,.$$

On en déduit

$$\delta = \ln\frac{u(t)}{u(t+T)} = \ln\mathrm{e}^{T/\tau} = \frac{2\pi}{\omega\tau}\,.$$

Or d'après les expressions rappelées à la première question,

$$\omega\tau = \frac{2Q}{\omega_0}\times\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = 2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,,$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\,.}$$

3 Pour $Q \gg 1$, on peut supposer $1/4Q^2 \ll 1$ et approximer

$$\boxed{\delta \simeq \frac{\pi}{Q}\,.}$$

Pour $Q = 3{,}5$, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \simeq 1{,}01$$

ce qui signifie que l'approximation devient valable à mieux que 1 % près dès lors que $Q > 3{,}5$.

4 Il suffit d'estimer le décrément logarithmique en mesurant les maxima successifs de la tension u, ce qui est particulièrement facile sur le plan expérimental.

□ Exercice 10.5. Analyse d'un relevé expérimental ★★

Trois paramètres sont à déterminer par lecture de la courbe : E, L et C. Sur cette courbe, trois caractéristiques sont aisément mesurables : le temps caractéristique τ d'amortissement des oscillations, leur pseudo-période T_p et leur amplitude à l'instant initial $t = 0$ (en toute rigueur à t légèrement supérieur à zéro). Il faut donc relier entre eux ces paramètres.

Le générateur est dit non-idéal : il faut donc le modéliser par une source idéale de tension montée en série avec une résistance $R = 50\,\Omega$. Le circuit est donc un circuit RLC série soumis à un échelon, dans lequel on établit facilement l'équation différentielle portant sur le courant i,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

La courbe donne des oscillations, le régime est donc pseudo-périodique. Le courant $i(t)$ s'écrit donc sous la forme

$$i(t) = \left[A\cos(\omega_\mathrm{p}t) + B\sin(\omega_\mathrm{p}t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \mu = \dfrac{\omega_0}{2Q} \\ \omega_\mathrm{p} = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}} \end{cases}$$

On compte sur la courbe huit oscillations en 1 ms, d'où

$$T_\mathrm{p} = 0{,}12\,\mathrm{ms} \qquad \text{donc} \qquad \omega_\mathrm{p} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{p}} = 5{,}0\cdot 10^4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.$$

Par ailleurs, on lit graphiquement que le temps $\tau = 1/\mu$ au bout duquel l'enveloppe exponentielle des oscillations atteint 37 % de sa valeur initiale (exponentielle décroissante avec valeur asymptotique nulle) vaut $\tau = 0{,}8\,\mathrm{ms}$, d'où

$$\tau = 0{,}8\,\mathrm{ms} \qquad \text{d'où} \qquad \mu = \frac{1}{\tau} = 1{,}3\cdot 10^3\,\mathrm{s^{-1}}$$

En inversant les relations donnant μ et ω_p, on trouve

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_\mathrm{p}^2 + \mu^2} = 5{,}0\cdot 10^4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad Q = 20$$

Ces résultats sont conformes à ce que l'on peut attendre : rappelons que Q compte le nombre d'oscillations dans le régime transitoire, dont il est raisonnable qu'il soit de l'ordre de 20 à 30. Puis, compte tenu de la valeur de Q, il est normal d'avoir $\omega_p \simeq \omega_0$. En inversant les relations donnant Q et ω_0 en fonction des valeurs composants, on trouve

$$\boxed{L = \frac{RQ}{\omega_0} = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{H} \qquad \text{et} \qquad C = \frac{1}{R\,Q\,\omega_0} = 2{,}0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{F}\,.}$$

Il reste enfin à trouver l'amplitude E de l'échelon de tension. Les conditions initiales pour ce circuit soumis à un échelon passant de E_1 à E_2 se déterminent comme d'habitude avec les relations de continuité et donnent

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

en ce qui concerne l'intensité. En ce qui concerne sa dérivée, elle s'obtient via la tension aux bornes de la bobine. Comme la tension aux bornes du condensateur vaut E_1 à $t = 0^-$, alors la loi des mailles donne à $t = 0^+$

$$E_2 = u_R(0^+) + u_L(0^+) + u_C(0^+) = R\,i(0^+) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) + u_C(0^-) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) + E_1 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{L}\,.$$

Il est donc seulement possible de déterminer *la hauteur* $E = E_2 - E_1$ de l'échelon, mais pas les valeurs initiale et finale de la tension imposée par le générateur. On peut alors en déduire par la méthode usuelle

$$A = 0 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{E}{L\,\omega_p}$$

soit

$$i(t) = \frac{E}{L\,\omega_p}\sin(\omega_p t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}\,.$$

Comme $T_p \ll \tau$, la valeur de $E/L\,\omega_p$ correspond en bonne approximation à la valeur de i à son premier extrêmum, soit

$$\frac{E}{L\,\omega_p} \simeq i_{\min} \simeq -5\,\mathrm{mA} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E = L\,\omega_p\,i_{\min} = -5\,\mathrm{V}\,.}$$

On peut s'assurer que $E < 0$ à partir du signe de la dérivée en $t = 0^+$.