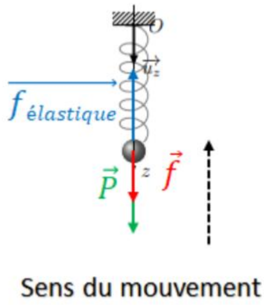
I] Oscillateur amorti mécanique ★

1. Mise en équation

On s'intéresse au mouvement d'une masse m assimilée à un point M accrochée à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

L'axe vertical descendant est noté (Oz), avec O situé au point d'attache du ressort.



On étudie donc la masselotte, de centre de masse M, dans le référentiel du laboratoire (donc terrestre, supposé galiléen), et soumis à :

- Son poids $\vec{P} = mg\,\overrightarrow{U_z}$

- La force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{él}} = -k(l - l_0)\overrightarrow{U_z} = -k(z - l_0)\overrightarrow{U_z}$

- L'action mécanique résultante des frottements visqueux, c'est-à-dire les frottements exercés par un fluide (gaz ou liquide) sur la masse. On modélise cette action par une force proportionnelle à la vitesse et opposée au mouvement. $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\vec{v}$

Avec $\alpha > 0$, le coefficient de frottement qui s'exprime en **kg.s^{-1}.**

On utilise le système de coordonnées cartésiennes dans lequel la vitesse s'exprime comme la dérivée temporelle du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{U_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{U_y} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{U_z} = \dot{x}\overrightarrow{U_x} + \dot{y}\overrightarrow{U_y} + \dot{z}\overrightarrow{U_z}$$

On peut obtenir l'équation différentielle du mouvement en utilisant la 2ème loi de Newton :

$$\boxed{m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}}$$

$$\Rightarrow \left(m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}\right) \bullet \overrightarrow{U_z}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\alpha\frac{dz}{dt} - k(z - l_0) + mg$$

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0}$$

Que l'on identifie à la une forme canonique de l'oscillateur amorti :

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dz}{dt}+\omega_0^2 z=g+\frac{k}{m}l_0$$

Avec :

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\Leftrightarrow\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}\text{ et }\frac{\omega_0}{Q}=\frac{\alpha}{m}\Leftrightarrow\boxed{Q=\omega_0\frac{m}{\alpha}=\frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

2. Analyse du régime stationnaire

Comme pour l'oscillateur harmonique, on interprète le régime permanent comme une position d'équilibre (Si $z=z_{eq}$ alors $\frac{dz}{dt}=0,$ d'où à l'équilibre : $\sum\overrightarrow{F_{ext}}=\vec{0}$).

$$\omega_0^2\,z_{eq}=g+\frac{k}{m}l_0$$

$$\boxed{z_{eq}=\frac{mg}{k}+l_0}$$

3. Application

Enoncé *: On considère un système masse ressort plongé dans l'huile. La masse vaut **m = 100 g**, la constante de raideur du ressort **k = 10 N.m⁻¹** et le coefficient de frottement fluide* $\alpha=2$ **kg.s⁻¹**.

1) *Résoudre complétement l'équation du mouvement si initialement la masse est écartée d'une distance **d** de la position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale. Tracer la courbe **z = f(t).***

2) *Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime critique en fonction de* ω_0 ?

1) On commence par calculer le facteur de qualité : $Q=\frac{\sqrt{km}}{\alpha}=\frac{\sqrt{10\times0{,}1}}{2}=\frac{1}{2}$

On en déduit que le régime transitoire est critique, d'où :

$$z(t)=e^{-\omega_0 t}(At+B)+z_{eq}$$

Déterminons la valeur des constante d'intégration **A** et **B** avec les conditions initiales :

$$\frac{dz}{dt}=-\omega_0 e^{-\omega_0 t}\times At+Ae^{-\omega_0 t}=Ae^{-\omega_0 t}(1-\omega_0 t)$$

$$\frac{dz}{dt}(t=0)=0\Leftrightarrow A=0$$

$$z(t=0)=l_0+d=B+z_{eq}\Leftrightarrow B=l_0+d-z_{eq}$$

$$z(t)=(l_0+d-z_{eq})e^{-\omega_0 t}+z_{eq}=z_{eq}\left(1-e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\right)+(l_0+d)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

2) L'ordre de grandeur du régime transitoire est quelques fois $\tau=\frac{1}{\omega_0}$

<u>II] Bilan énergétique</u> ★

On peut établir le bilan d'énergie directement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = P(\overrightarrow{F_{ext,NC}})}$$

$$\boxed{P(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \vec{v}}$$

La seul force non-conservative est la force de frottement fluide.

$$P(\overrightarrow{F_f}) = -\alpha\vec{v} \bullet \vec{v} = -\alpha\|\vec{v}\|^2 = -\alpha \times \dot{z}^2$$

L'énergie mécanique est la somme des énergies potentielles et cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$
$$E_p = -mgz + \frac{1}{2}k(z - l_0)^2$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k(z - l_0)^2$$

D'où :

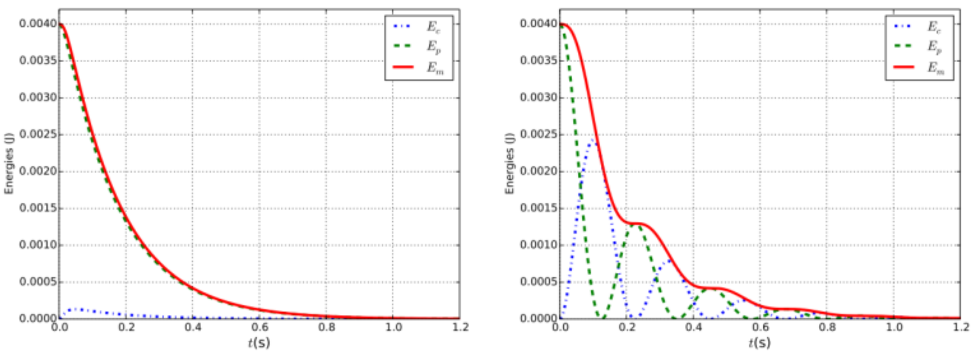
$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{z}\ddot{z} + k\dot{z}(z - l_0) - mg\dot{z} = -\alpha\dot{z}^2$$

$$\dot{z}(m\ddot{z} + k(z - l_0) - \alpha\dot{z} - mg) = 0$$

Cette équation est une équation instantanée. Il existe deux solutions : $\dot{z} = 0$ ∀t et $m\ddot{z} + m\ddot{z} + k(z - l_0) - \alpha\dot{z} - mg = 0$

La première solution traduit la position d'équilibre et la deuxième correspond à l'équation différentielle du mouvement.

Par la suite, on peut calculer les expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique à partir de la solution **z(t)** et tracer leurs évolutions temporelles pour les différents régimes :



<u>*Evolution temporelle des énergies pour les régimes apériodique et pseudo-périodique*</u>

☐ Exercice 1. Oscillations d'une sphère

Dans les deux dispositifs de la figure 1, la sphère est reliée par une poulie parfaite à un ressort de raideur fixé au mur. Dans le premier cas, la sphère oscille dans l'air où la période des oscillations vaut T_1. Dans la seconde situation, la sphère baigne dans de l'eau de viscosité dynamique η et subit la force de Stokes

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$$

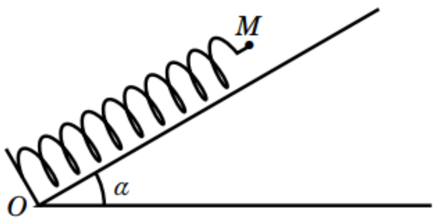
où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère. La période des oscillations vaut alors $T_2 > T_1$.

Question : Exprimer la viscosité η.

Figure 1 – Oscillations d'une sphère suspendue.

☐ Exercice 2. Oscillations sur un plan incliné

Un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 est accroché en O à la partie inférieure d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. La masse m, accrochée à l'extrémité supérieure du ressort, est également soumise à une force de frottement fluide $-\lambda\vec{v}$. On note x la distance OM.



1 – Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x.

2 – Déterminer l'expression de la longueur à l'équilibre du ressort.

On étire le ressort d'une longueur a à partir de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse.

3 – En négligeant les frottements, résoudre cette équation. Commenter.

4 – En considérant que les frottements avec l'air sont très faibles, donner la solution de l'équation différentielle complète.

☐ Exercice 3. Problème ouvert : À la cantine

La cantine du lycée utilise des chariots à niveau constant pour la distribution des plateaux. Ceux-ci sont posés sur un support plan maintenu par des ressorts de telle sorte que le haut de la pile soit toujours à la même hauteur, quel que soit le nombre de plateaux empilés, voir figure 2.

Question : Déterminer toutes les caractéristiques utiles de la machine. Des valeurs numériques vraisemblables sont attendues.

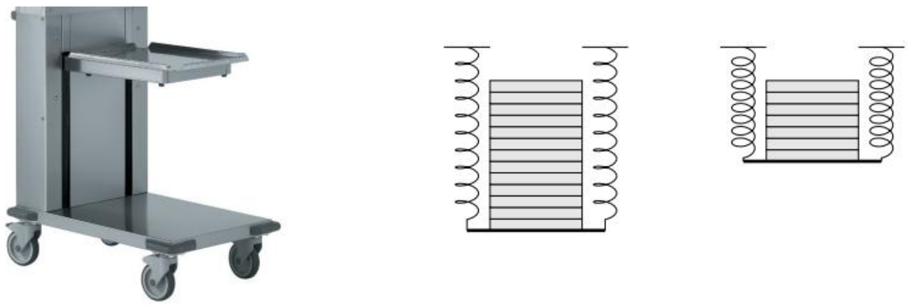


Figure 2 – Chariot à niveau constant d'un distributeur de plateaux.