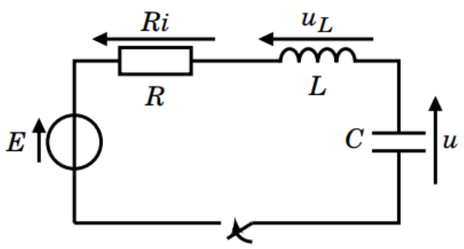
Interrogation de cours n°1 (9 pts + 1pt POL)



On considère le circuit RLC série ci-contre, avec un condensateur initialement déchargé et un interrupteur ouvert pour $t < 0$.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1) Ecrire la loi des mailles ainsi que les relations tension-courant de la résistance, du condensateur et de la bobine. **1 pt**

2) En deduire l'équation différentielle du circuit sur u (la tension aux bornes du condensateur). **1 pt**

$$\begin{cases} Ri + u_L + u - E = 0 & (1) \\ i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} & (2) \\ u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} & (3) \end{cases} \Rightarrow LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = \frac{1}{LC}E$$

3) Mettre cette équation sous forme canonique (F2). Identifier le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 en fonction de R, L et C. **1 pt**

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = f(t)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad Q = \omega_0\frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

4A) Déterminer le type de régime transitoire pour R = 100 Ω , L = 10 mH et C = 10 nF. **1 pt**

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{10\times10^{-3}}{10\times10^{-9}}} = 10$$

$$Q > \frac{1}{2}$$

On en déduit que le régime transitoire est pseudo-périodique.

5A) Pour ce régime, donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (solution de l'équation homogène et solution particulière) en fonction de ω_0, Q et E. (On introduira A et B deux constantes d'intégrations et si besoin ω_p la peuso-pulsation). **1 pt**

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos(\omega_p\, t) + B\sin(\omega_p\, t)\right) + E$$

Avec,

$$\omega_P = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

6A) Déterminer, en justifiant, les conditions initiales sur $u(t=0)$ et $\frac{du}{dt}(t=0)$. **1 pt**

Il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur, d'où :

$$\boldsymbol{u(t=0)=0}$$

Il y a continuité de l'intensité dans une bobine, d'où :

$$\boldsymbol{i(t=0)=0}$$

$$\boldsymbol{C\frac{du}{dt}(t=0)=0}$$

$$\boldsymbol{\frac{du}{dt}(t=0)=0}$$

7A) Appliquer les contitions initiales pour trouver A et B. Ecrire la solution générale de u(t). **2 pts**

$$\boldsymbol{u(t=0)=0=e^{-\frac{\omega_0}{2Q}0}\left(\mathrm{A}cos(\omega_P\,0)+\mathrm{B}sin(\omega_P\,0)\right)+E}$$

$$\boldsymbol{0=A+E}$$

$$\boldsymbol{A=-E}$$

$$\boldsymbol{\frac{du}{dt}=\frac{-\omega_0}{2Q}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\mathrm{A}cos(\omega_P\,t)+\mathrm{B}sin(\omega_P\,t)\right)+e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(-\mathrm{A}\omega_P\mathrm{sin}(\omega_P\,t)+\mathrm{B}\omega_P cos(\omega_P\,t)\right)}$$

$$\boldsymbol{\frac{du}{dt}(t=0)=0=\frac{-\omega_0}{2Q}\mathrm{A}+\mathrm{B}\omega_P}$$

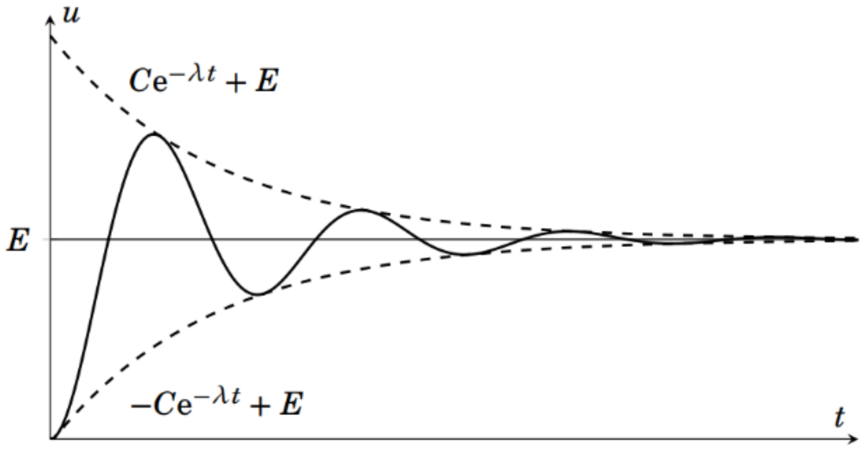
$$\boldsymbol{\mathrm{B}=\frac{\omega_0}{2\omega_P Q}\times A}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{B}=\frac{-\omega_0}{2\omega_P Q}\times E}$$

$$\boldsymbol{u(t)=e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(-\mathrm{E}\times cos(\omega_P\,t)+\frac{-\omega_0}{2\omega_P Q}\times E\times sin(\omega_P\,t)\right)+E}$$

$$\boldsymbol{u(t)=E[1-e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(cos(\omega_P\,t)+\frac{\omega_0}{2\omega_P Q}sin(\omega_P\,t)\right)]}$$

8A) Tracer qualitativement la courbe de u = f(t). **1 pt**



4B) Déterminer le type de régime transitoire pour R = 10 kΩ , L = 1 mH et C = 100 nF. **1 pt**

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10 \times 10^3}\sqrt{\frac{1 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-9}}} = 0,01$$

$$Q < \frac{1}{2}$$

On en déduit que le régime transitoire est apériodique.

5B) Pour ce régime, donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (solution de l'équation homogène et solution particulière) en fonction de ω_0, Q et E. (On introduira A et B deux constantes d'intégrations et si besoin ω_p la peuso-pulsation). **1 pt**

$$u(t) = \mathrm{A}e^{r_1 t} + \mathrm{B}e^{r_2 t} + E$$

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

7B) Appliquer les contitions initiales pour trouver A et B. Ecrire la solution générale de u(t). **2 pts**

$$u(t = 0) = \mathrm{A} + \mathrm{B} + E = 0$$

$$\frac{du}{dt} = Ar_1e^{r_1 t} + \mathrm{B}r_2e^{r_2 t}$$

$$\frac{du}{dt}(t = 0) = Ar_1 + \mathrm{B}r_2 = 0$$

D'où

$$\mathrm{A} = \frac{r_2 E}{r_1 - r_2} \quad et \quad \mathrm{B} = \frac{r_1 E}{r_2 - r_1}$$

8B) Tracer qualitativement la courbe de u = f(t). **1 pt**