□ Exercice 1. Oscillations d'une sphère

• **Système :** Étudions le mouvement de la sphère dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On introdui axe z vertical vers le bas.

• **Bilan des forces :**

▹ La sphère est soumise à son poids,

$$\vec{P} = m\vec{g} = +mg\,\vec{e}_z\,.$$

▹ En supposant le fil qui attache la sphère au ressort inextensible, alors la longueur du ressort est reliée à l'altitu du centre de masse de la sphère par

$$\ell = z + a$$

avec a une longueur constante. Ainsi, la sphère subit de la part du ressort une force

$$\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_z = -k(z + a - \ell_0)\,\vec{e}_z\,.$$

▹ Enfin, dans le second cas seulement, il faut également prendre en compte la force de Stokes

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v} = -6\pi\eta R\dot{z}\,\vec{e}_z\,.$$

• **Principe fondamental de la dynamique :** l'équation du mouvement s'écrit

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{F}$$

donc en projection sur $\vec{e}_z$

$$m\ddot{z} = mg - k(z + a - \ell_0) - 6\pi\eta R\dot{z}$$

ce qui se met sous la forme

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{6\pi\eta R}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g - \frac{k}{m}(a - \ell_0)\,.}$$

• **Premier cas :** tout se passe formellement comme si $\eta = 0$, on reconnaît alors une équation d'oscillateur har nique de pulsation propre

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{soit} \qquad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0}\,.$$

• **Deuxième cas :** sous forme canonique, cette équation s'écrit

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = g - \frac{k}{m}(a - \ell_0) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} \\ Q = \dfrac{\sqrt{km}}{6\pi\eta R} \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique a pour discriminant

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0$$

car on observe des oscillations. Les racines du polynôme sont donc

$$r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\,.$$

La pseudo-pulsation des oscillations est donnée par la partie imaginaire des racines,

$$\Omega_p = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{d'où} \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}\,.$$

• **Conclusion :** des deux études précédentes on déduit

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4Q^2}$$

$$\frac{1}{4Q^2} = 1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

$$\frac{1}{4 \times \frac{km}{36\pi^2\eta^2R^2}} = 1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

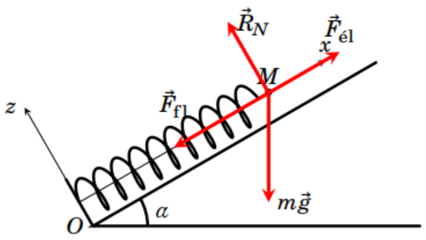
$$\frac{9\pi^2\eta^2R^2}{km} = 1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{km}{9\pi^2R^2}\left[1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right]}\,.}$$

□ Exercice 2. Mouvement sur plan incliné

1 – On étudie la masselotte attachée au bout du ressort, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces à considérer sont :

- le poids $m\vec{g} = -mg\sin\alpha\vec{u}_x - mg\cos\alpha\vec{u}_z$;
- la réaction du support (normale en l'absence de frottement sec) $\vec{R}_N$, qui impose la contraingte $z = 0$;
- la force élastique imposée par le ressort $\vec{F}_{él} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$;
- et le frottement fluide $\vec{F}_{fl} = -\lambda\dot{x}\vec{u}_x$.



On écrit la 2[e]loi de Newton :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{F}_{él} + \vec{F}_{fl} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = k\ell_0 - mg\sin\alpha}$$

2 – La position d'équilibre peut être obtenue de deux façons :

- soit en écrivant le PFD en statique :

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{F}_{él}(x_{éq}) + \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{éq} = \ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k}}$$

- soit en cherchant une solution identiquement constante à l'équation différentielle précédente, ce qui amène au même résultat.

On peut la commenter :

- $x_{éq} < \ell_0$ donc le ressort est contracté, ce qui est normal pour équilibrer la projection du poids ;
- plus la projection du poids $mg\sin\alpha$ augmente plus le ressort est contracté ;
- plus la raideur est importante moins le ressort est contracté pour compenser la projectiondu poids.

3 – Sans frottements, on reconnaît un oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k\ell_0}{m} - g\sin\alpha = \frac{k}{m}x_{éq}$$

donc

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{éq} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{cases} x(0) = x_{éq} + a = A\cos\varphi + x_{éq} \\ \dot{x}(0) = 0 = -\omega_0 A\sin\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = a \end{cases}$$

donc finalement

$$\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t) + x_{éq}}$$

4 – Écrivons l'équation sous forme canonique

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{éq} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$$

Puisque les frottements sont très faibles, le régime est pseudopériodique et $Q \gg 1$:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\cos(\omega t + \varphi) + x_{éq} \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq \omega_0$$

On écrit les CI

$$\begin{cases} A\cos\varphi + x_{éq} = a + x_{éq} \\ -A\omega_0\sin\varphi - A\frac{\omega_0}{2Q}\cos\varphi = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tan\varphi = -1/2Q \\ A\cos\varphi = a \end{cases}$$

mais avec $Q \gg 1$

$$\begin{cases} \varphi \simeq -1/2Q \\ A \simeq a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = ae^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\cos\left(\omega_0 t - \frac{1}{2Q}\right) + x_{éq}}$$

□ Exercice 3. Problème : A la cantine

Supposons que le distributeur porte N plateaux, tous d'épaisseur $e = 1$ cm et de masse $m = 200$ g. Quelle que soit la valeur de N, le sommet de la pile de plateaux se trouve $h = 10$ cm sous le point d'attache des deux ressorts. On néglige le poids du support à plateaux devant celui des plateaux. Comme les plateaux sont évidemment immobiles (...) alors la force exercée par les deux ressorts doit compenser le poids des plateaux, ce qui se traduit par

$$2k(Ne + h - \ell_0) = Nmg \qquad \text{soit} \qquad 2k(h - \ell_0) + N(2ke - mg) = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de N, on en déduit les deux égalités

$$\begin{cases} 2k(h - \ell_0) = 0 \\ 2ke - mg = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\begin{cases} \ell_0 = h = 10\,\text{cm} \\ k = \dfrac{mg}{2e} = 100\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1} \end{cases}}$$

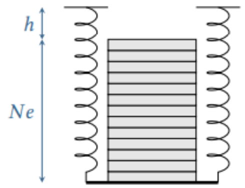


Figure 6 – Distributeur de plateaux.

Pour identifier le système d'équations, on peut également raisonner d'abord sur le cas $N = 0$ qui donne la première équation du système, puis simplifier l'équation issue du PFD, et en déduire la deuxième équation du système.