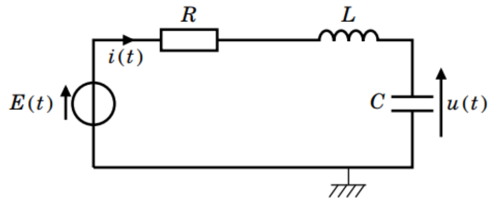
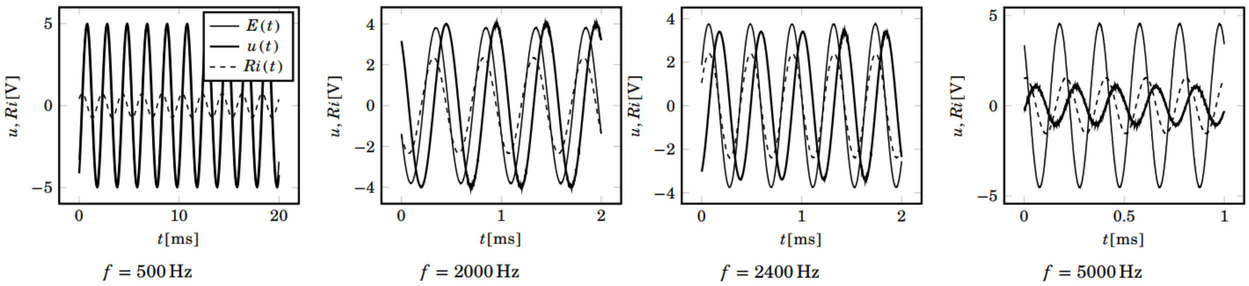
Expérience introductive : circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale ★



On observe la tension $u_r(t)$ aux bornes de la résistance dans un circuit RLC série alimenté par un GBF qui délivre un signal sinusoïdal.

En faisant varier la fréquence d'excitation f du GBF, on observe :



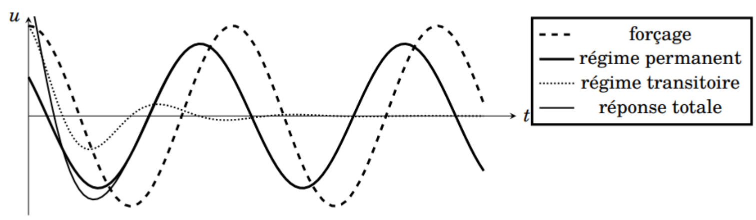
Cadre de l'étude :

La réponse d'un système linéaire soumis à une excitation sinusoïdale est décrit par une l'équation différentielle de la forme :

$$\sum_k a_k \frac{d^k u}{dt^k} = E_0 \cos(\omega t), \qquad \text{avec } \omega = 2\pi f$$

La solution générale de cette équation différentielle linéaire est la somme de deux contributions:

- La **solution de l'équation homogène $u_H(t)$,** qui **tend vers 0** à la fin du régime transitoire.
- La **solution particulière $u_P(t)$,** que l'on cherche **de forme sinusoïdale à la pulsation imposée ω**, qui reste seule contribution de la réponse du système une fois le régime permanent atteint.



Nous allons étudier le régime sinusoïdal forcé (RSF), c'est-à-dire le comportement au cours du temps du système **en régime permanent (une fois le régime transitoire terminé)**.

Dans ce régime, **la réponse d'un système** dépend **de la fréquence d'excitation $f = \omega/2\pi$.**

I] Première tentative de résolution : Exemple du circuit RLC série ★

II] Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

1. Définition

On associe à un signal sinusoïdal réel **s(t) = Acos($\omega t+\varphi$)** d'amplitude A, de phase $\omega t+\varphi$ et de moyenne nulle, une **représentation complexe** notée $\underline{s}$, de module A et d'argument $\omega t + \varphi$:

$$\boxed{\underline{s}(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}}$$

On définit l'amplitude complexe du signal $\underline{S} = Ae^{j\varphi}$ comme étant la grandeur complexe contenant l'information d'amplitude **A** et de phase à l'origine **φ** du signal :

$$\boxed{\underline{s}(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t} = \underline{S}e^{j\omega t}}$$

Pour retrouver la représentation temporelle du signal à partir de sa représentation complexe, on calcule le module **A** et l'argument **φ** de l'amplitude complexe :

$$\left|\underline{s}(t)\right| = \left|\underline{S}\right| = A$$

$$arg(\underline{S}) = \varphi$$

Ainsi la connaissance de l'amplitude complexe $\underline{S}$ donne accès aux deux grandeurs inconnues du signal **s(t)** : son amplitude **A** et sa phase à l'origine **φ**.

La représentation complexe repose sur la linéarité. **Son usage est donc à proscrire pour les grandeurs qui ne le sont pas comme les grandeurs énergétiques** (*Exemple :* $E_C = \frac{1}{2}CU^2$). Pour calculer ce type de grandeur il faut impérativement retourner en représentation temporelle.

2. Propriétés

a. Dérivation

En représentation complexe, l'opération de dérivée correspond à une multiplication par jω :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\underline{s}) = j\omega\underline{s}}$$

Preuve : La dérivée d'un signal sinusoïdal, en représentation temporelle s'écrit :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Acos(\omega t + \varphi)\right) = -A\omega sin(\omega t + \varphi) = A\omega cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

On en conclut que l'opération de dérivée temporelle correspond à une multiplication de l'amplitude par ω et un ajout de déphasage $\pi/2$. En représentation complexe, en appliquant les même opération au signal $\underline{s}(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)}$, il vient :

$$\frac{d}{dt}(\underline{s}) = \frac{d}{dt}\left(Ae^{j(\omega t+\varphi)}\right) = j\omega Ae^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\underline{s}$$

b. Intégration

De la même façon, en représentation complexe, primitiver un signal revient à le diviser par jω :

$$\boxed{\int \underline{s}\, dt = \frac{1}{j\omega}\, \underline{s}}$$

Enoncé : *Démontrer cette propriété.*

a. Sommation

La représentation complexe de la somme $\underline{s}(t)$ de $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ est :

$$\underline{s}(t) = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}$$

$$\underline{s}(t) = (A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2}) e^{j\omega t}$$

$$\underline{s}(t) = (\underline{S_1} + \underline{S_2}) e^{j\omega t}$$

Énoncé : E, ω, τ , ω_0, Q sont des réels positifs.
1. Donner le signal complexe associé au signal suivant et identifier l'amplitude complexe : $e(t) = E\cos(\omega t + \pi/3)$
2. Donner le signal réel associé au signal d'amplitude complexe suivant : $\underline{U_L} = U_m e^{-j\pi/3}$.
3. Donner le module du complexe ci-contre : $\underline{U_m} = \dfrac{E}{1 + j\omega\tau}$
4. Donner l'expression de $\tan(\phi)$ avec ϕ l'argument de $\underline{U_m}$: $\underline{U_m} = \dfrac{E}{1 + j\omega\tau}$.

III] Loi d'Ohm généralisée : impédances complexes ★

Pour des dipôles linéaires passifs (résistance, condensateur et bobine), la relation entre $\boldsymbol{u(t)}$ et $\boldsymbol{i(t)}$ est une équation différentielle. La représentation complexe permet, en régime sinusoïdal forcé, de simplifier cette équation en une **relation algébrique** entre $\underline{\boldsymbol{U}}$ et $\underline{\boldsymbol{I}}$.

1. Impédance complexe

Pour ces dipôles en RSF, la tension complexe $\underline{\boldsymbol{U}}$ et l'intensité complexe $\underline{\boldsymbol{I}}$ sont reliées par la relation :

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{U}} = \underline{\boldsymbol{Z}} \times \underline{\boldsymbol{I}}}$$

Où $\underline{\boldsymbol{Z}}$ est un nombre complexe appelé **impédance complexe**, homogène à une résistance (donc ayant pour unité le ohm Ω). Ceci généralise, en RSF et en représentation complexe, la loi d'Ohm à tout dipôle linéaire passif.

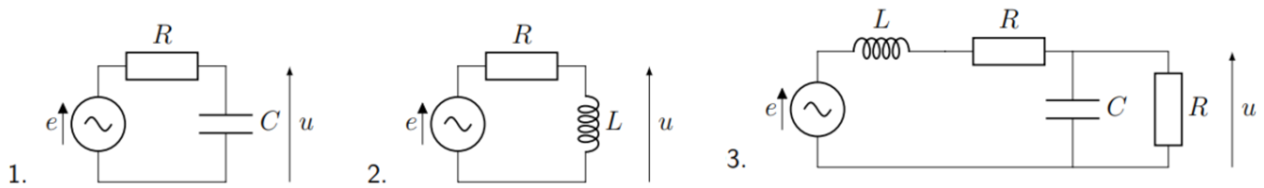
2. Expressions courantes ★

a. Résistance

b. Condensateur

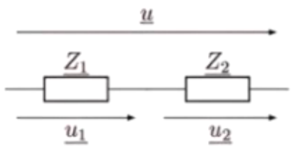
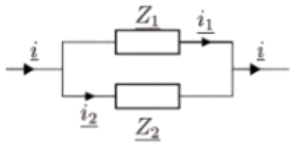
c. Bobine idéale

Enoncé *: Déterminer l'amplitude de la tension* ***u*** *dans les circuits ci-dessous aux basses et hautes fréquences.*
Tous les circuits sont alimentés par un générateur idéal de tension de f.é.m. ***e(t) = Ecos(ωt)****.*

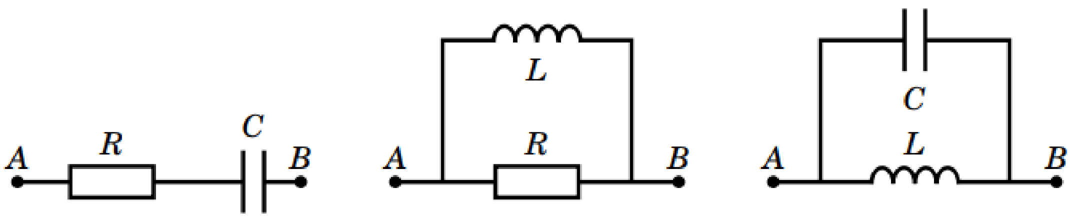


3. Généralisation des théorèmes : associations et ponts diviseurs

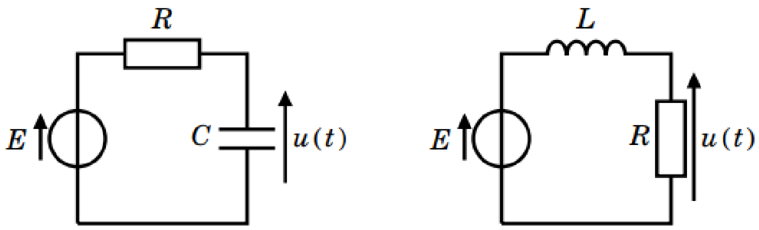
Les théorèmes démontrés à partir de la loi d'Ohm peuvent être généralisées en régime sinusoïdal forcé avec la notation complexe (*associations de dipôles équivalents et ponts diviseurs*).

Série	Dérivation
	
Impédance équivalente : $\underline{Z}_{éq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$	Impédance équivalente : $\frac{1}{\underline{Z}_{éq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \Leftrightarrow \underline{Z}_{éq} = \frac{\underline{Z}_1.\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$
Pont diviseur de tension : $\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{u}$	Pont diviseur de courant : $\underline{i}_1 = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}}\underline{i}$

Enoncé : *Pour chacun des circuits suivants, exprimer l'impédance complexe* $\underline{\boldsymbol{Z_{AB}}}$ *équivalente au dipôle AB. On notera* $\boldsymbol{\omega}$ *la pulsation des grandeurs électriques.*



Enoncé : *Etablir les expressions de* $\underline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t})$ *en fonction de* $\underline{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{E_0 e^{j\omega t}}$ *pour les circuits ci-dessous.*



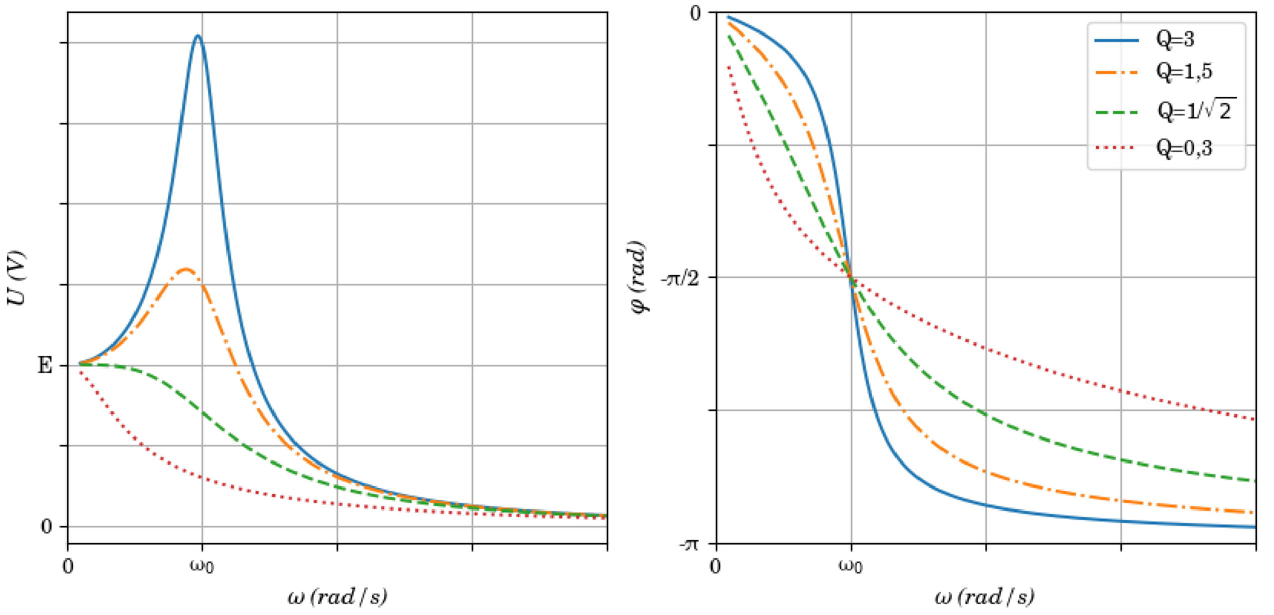
III] Etude du RLC série en régime sinusoïdal forcé : résonance en tension ★

1. Mise en équation
2. Calcul d'amplitude et phase
3. Limites hautes et basses fréquences

Enoncé : *Déterminer les limites haute et basse fréquence de l'amplitude* $\mathbf{U}$ *et de la phase* $\boldsymbol{\varphi}$.

4. Résonance

On trace les évolutions de l'amplitude $\mathbf{U}$ et de la phase φ en fonction de la pulsation ω.



IV] Etude du RLC série en régime sinusoïdal forcé : résonance en intensité (en exercice)

V] Analogie entre oscillateurs électrocinétique et mécanique ★

Expérience de cours :

On excite avec un déplacement sinusoïdal de la main un système masse-ressort. Appelons **z(t)** la position de la masse.

On observe l'évolution de la position de la masse en fonction de la fréquence d'excitation :

En rapprochant les équations différentielles des oscillateurs électrocinétiques et mécaniques, on peut dresser des analogies.

La réponse en tension de l'oscillateur électrique est analogue à la réponse en position de l'oscillateur mécanique de même que la réponse en intensité est analogue à la réponse en vitesse.

Grandeur	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrocinétique
Grandeurs cinématiques	z	$u = \frac{q}{C}$
	$\dot{z} = \frac{dz}{dt}$	$i = \frac{dq}{dt}$
Inertie	m	L
Coefficient de rappel	k	$\frac{1}{C}$
Coefficient de frottement	α	R
Equation différentielle	$m\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha\frac{dz}{dt} + kz = kA\cos(\omega t)$	$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = E\cos(\omega t)$
Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité Q	$Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Réponse en position	$\underline{Z} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \times A$	$\underline{U} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \times E$
Réponse en vitesse	$\underline{V} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \times \frac{kA}{\alpha}$	$\underline{I} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \times \frac{E}{R}$