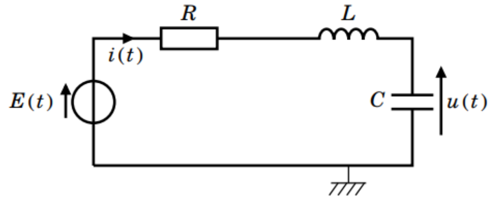
Expérience introductive : circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale

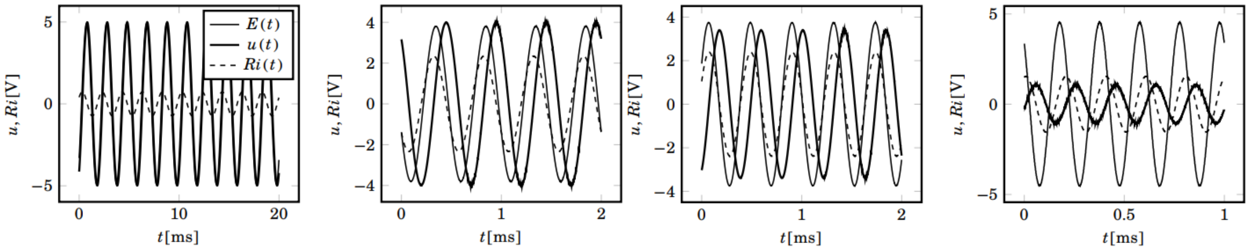
On observe la tension $u_r(t)$ aux bornes de la résistance dans un circuit RLC série alimenté par un GBF qui délivre un signal sinusoïdal.



En faisant varier la fréquence d'excitation f du GBF, on observe :

- La tension aux bornes de la résistance est **sinusoïdale à la même fréquence que l'excitation** (il en est de même que toutes les grandeurs électriques du circuit).
- **L'amplitude et la déphasage dépendent de la fréquence** (cf. illustrations ci-dessous)
-

On constate qu'il existe **certaines fréquences d'excitation qui maximisent l'amplitude du signal de réponse**. Si de telles fréquences existent, on parle alors de phénomène de **résonance**.



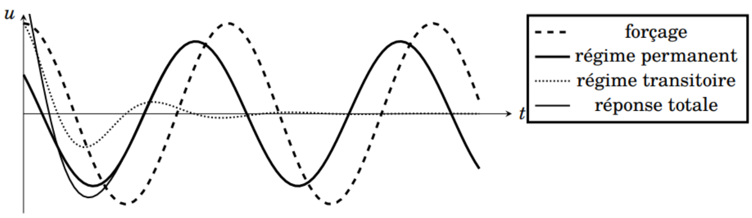
Cadre de l'étude :

La réponse d'un système linéaire soumis à une excitation sinusoïdale est décrit par une l'équation différentielle de la forme :

$$\sum_k a_k \frac{d^k u}{dt^k} = E_0 \cos(\omega t), \qquad \text{avec } \omega = 2\pi f$$

La solution générale de cette équation différentielle linéaire est la somme de deux contributions:

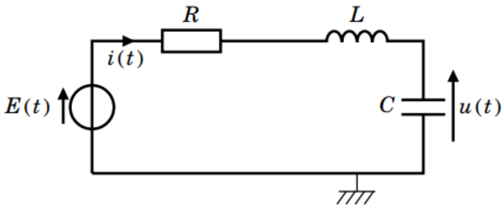
- La **solution de l'équation homogène $u_H(t)$,** qui **tend vers 0** à la fin du régime transitoire.
- La **solution particulière $u_P(t)$,** que l'on cherche **de forme sinusoïdale à la pulsation imposée ω**, qui reste seule contribution de la réponse du système une fois le régime permanent atteint.



Nous allons étudier le régime sinusoïdal forcé (RSF), c'est-à-dire le comportement au cours du temps du système **en régime permanent (une fois le régime transitoire terminé)**.

Dans ce régime, **la réponse d'un système** dépend **de la fréquence d'excitation $f = \omega/2\pi$.**

I] Première tentative de résolution : Exemple du circuit RLC série



On considère le circuit RLC ci-dessous alimenté par un générateur idéal qui délivre une tension sinusoïdale : **E(t) = E_0 cos(ωt).**

On s'intéresse uniquement à la réponse (tension au borne de C) en régime permanent.

Trouvons l'équation différentielle du circuit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u + u_L + u = E(t)} \\ \boldsymbol{u_L = L\dfrac{di}{dt}} \\ \boldsymbol{i = C\dfrac{du}{dt}} \\ \boldsymbol{u = Ri} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = E\cos(\omega t)}$$

Cherchons une solution particulière $\boldsymbol{u(t)}$ (solution en régime permanent) de cette équation sous forme d'une fonction sinusoïdale à la même fréquence avec une amplitude $\boldsymbol{U_0}(\boldsymbol{\omega})$ et une phase à l'origine $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\omega})$ qui dépendent de la fréquence. Cette solution s'écrit :

$$\boldsymbol{u(t) = U cos(\omega t + \varphi)}$$

Dérivons la solution pour l'injecter dans l'équation différentielle :

$$\boldsymbol{\frac{du}{dt}(t) = -U\omega\, sin(\omega t + \varphi)}$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2u}{dt^2}(t) = -U\omega^2 cos(\omega t + \varphi)}$$

On obtient :

$$\boldsymbol{LC \times [-U\omega^2 cos(\omega t + \varphi)] + RC \times [-U\omega\, sin(\omega t + \varphi)] + U cos(\omega t + \varphi) = E\cos(\omega t)}$$

Cette équation est difficile à résoudre (i.e. : trouver $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\omega})$ et $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\omega})$) car elle fait intervenir des fonctions sinusoïdales avec des phases à l'origine différentes.

Pour simplifier la mise en équation et la résolution, on va utiliser une outil mathématique efficace introduit par le physicien Heaviside (1850-1925), **la représentation complexe**.

II] Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

1. Définition

On associe à un signal sinusoïdal réel $s(t)$ = A$\cos(\omega t+\varphi)$ d'amplitude A, de phase $\omega t+\varphi$ et de moyenne nulle, une **représentation complexe** notée $\underline{s}$, de module A et d'argument $\omega t+\varphi$:

$$\boxed{\underline{s}(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)}}$$

On définit l'amplitude complexe du signal $\underline{S} = Ae^{j\varphi}$ comme étant la grandeur complexe contenant l'information d'amplitude **A** et de phase à l'origine **φ** du signal :

$$\boxed{\underline{s}(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t} = \underline{S}e^{j\omega t}}$$

Pour retrouver la représentation temporelle du signal à partir de sa représentation complexe, on calcule le module **A** et l'argument **φ** de l'amplitude complexe :

$$|\underline{s}(t)| = |\underline{S}| = A$$

$$arg(\underline{S}) = \varphi$$

Ainsi la connaissance de l'amplitude complexe $\underline{S}$ donne accès aux deux grandeurs inconnues du signal **s(t)** : son amplitude **A** et sa phase à l'origine **φ**.

La représentation complexe repose sur la linéarité. **Son usage est donc à proscrire pour les grandeurs qui ne le sont pas comme les grandeurs énergétiques** (E*xemple :* $E_C = \frac{1}{2}CU^2$). Pour calculer ce type de grandeur il faut impérativement retourner en représentation temporelle.

2. Propriétés

a. Dérivation

En représentation complexe, l'opération de dérivée correspond à une multiplication par jω :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\underline{s}) = j\omega\underline{s}}$$

Preuve : La dérivée d'un signal sinusoïdal, en représentation temporelle s'écrit :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\big(A\cos(\omega t+\varphi)\big) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) = A\omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

On en conclut que l'opération de dérivée temporelle correspond à une multiplication de l'amplitude par ω et un ajout de déphasage $\pi/2$. En représentation complexe, en appliquant les même opération au signal $\underline{s}(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)}$, il vient :

$$\frac{d}{dt}(\underline{s}) = \frac{d}{dt}\left(Ae^{j(\omega t+\varphi)}\right) = j\omega Ae^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\underline{s}$$

b. Intégration

De la même façon, en représentation complexe, primitiver un signal revient à le diviser par jω :

$$\boxed{\int \underline{s}\, dt = \frac{1}{j\omega}\, \underline{s}}$$

***Enoncé :** Démontrer cette propriété.*

Correction :

$$\int \underline{s}\, dt = \int Ae^{j(\omega t+\varphi)}\, dt = Ae^{j\varphi} \int e^{j\omega t}\, dt = Ae^{j\varphi} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{1}{j\omega} \underline{s}$$

a. Sommation

La représentation complexe de la somme $\underline{s}(t)$ de $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ est :

$$\underline{s}(t) = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}$$

$$\underline{s}(t) = (A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2}) e^{j\omega t}$$

$$\underline{s}(t) = (\underline{S_1} + \underline{S_2}) e^{j\omega t}$$

Énoncé : E, ω, τ , ω_0, Q sont des réels positifs.

1. Donner le signal complexe associé au signal suivant et identifier l'amplitude complexe : $e(t) = E\cos(\omega t + \pi/3)$

2. Donner le signal réel associé au signal d'amplitude complexe suivant : $\underline{U_L} = U_m e^{-j\pi/3}$.

3. Donner le module du complexe ci-contre : $\underline{U_m} = \dfrac{E}{1 + j\omega\tau}$

4. Donner l'expression de $\tan(\phi)$ avec ϕ l'argument de $\underline{U_m}$: $\underline{U_m} = \dfrac{E}{1 + j\omega\tau}$.

Correction :

1. $\boxed{\underline{e} = Ee^{j(\omega t + \pi/3)}} = \underline{E} e^{j\omega t}$, avec $\boxed{\underline{E} = Ee^{j\pi/3}}$.

2. L'amplitude est U_m et la phase $-\pi/3$, donc le signal réel s'écrit $\boxed{u_L(t) = U_m \cos(\omega t - \pi/3)}$.

3. $\boxed{|\underline{U_m}| = \dfrac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}}$.

4. $\boxed{\tan(\phi) = -\omega\tau} \rightarrow \boxed{\phi = \arctan(-\omega\tau)}$

III] Loi d'Ohm généralisée : impédances complexes

Pour des dipôles linéaires passifs (résistance, condensateur et bobine), la relation entre $u(t)$ et $i(t)$ est une équation différentielle. La représentation complexe permet, en régime sinusoïdal forcé, de simplifier cette équation en une **relation algébrique** entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$.

1. Impédance complexe

Pour ces dipôles en RSF, la tension complexe $\underline{U}$ et l'intensité complexe $\underline{I}$ sont reliées par la relation :

$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I}}$$

Où $\underline{Z}$ est un nombre complexe appelé **impédance complexe**, homogène à une résistance (donc ayant pour unité le ohm Ω). Ceci généralise, en RSF et en représentation complexe, la loi d'Ohm à tout dipôle linéaire passif.

2. Expressions courantes

a. Résistance

$$u(t) = R \times i(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{U} = R \times \underline{I} \quad \Rightarrow \boxed{\underline{Z_R} = R}$$

L'impédance de résistance est réelle, on en déduit que la tension à ses bornes et l'intensité la traversant sont en phase.

b. Condensateur

$$i(t) = C\frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = j\omega C \times \underline{U} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U} = \frac{1}{jC\omega} \times \underline{I} \Rightarrow \boxed{\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}}$$

• Pour $\omega \to 0$ (Basses fréquences), le régime sinusoïdal tend vers un régime stationnaire et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert :

$$|\underline{Z_c}| = \frac{1}{C\omega} \xrightarrow[\omega \to 0]{} \infty$$

• Pour $\omega \to \infty$ (Hautes fréquences), le condensateur se comporte comme un fil :

$$|\underline{Z_c}| = \frac{1}{C\omega} \xrightarrow[\omega \to \infty]{} 0$$

c. Bobine idéale

$$u(t) = L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{U} = j\omega L \times \underline{I} \quad \Rightarrow \boxed{\underline{Z_L} = jL\omega}$$

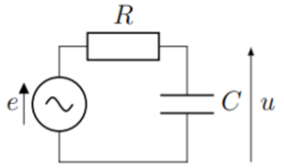
• Pour $\omega \to 0$ (Basses fréquences), le régime sinusoïdal tend vers un régime stationnaire et la bobine idéale se comporte comme fil :

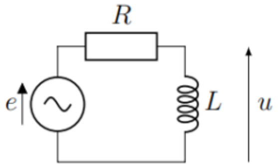
$$|\underline{Z_L}| = L\omega \xrightarrow[\omega \to 0]{} 0$$

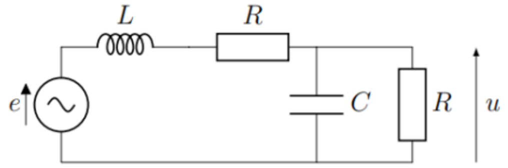
• Pour $\omega \to \infty$ (Hautes fréquences), La bobine idéale se comporte comme un interrupteur ouvert.

$$|\underline{Z_L}| = L\omega \xrightarrow[\omega \to \infty]{} \infty$$

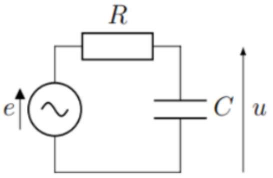
Enoncé *: Déterminer l'amplitude de la tension* ***u*** *dans les circuits ci-dessous aux basses et hautes fréquences.*
Tous les circuits sont alimentés par un générateur idéal de tension de f.é.m. ***e(t) = Ecos(ωt)****.*

1.


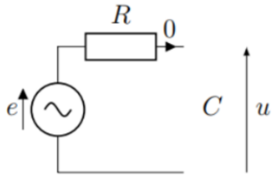
2.


3.


Correction :

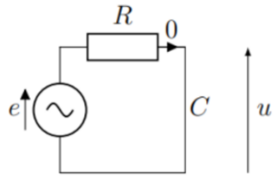
1.


À BF : $Z_C = \dfrac{1}{C\omega} \to \infty$: c'est un interrupteur ouvert

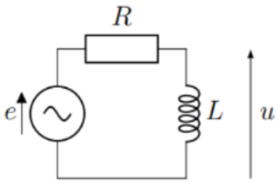


Loi des mailles : $\boxed{u = e}$

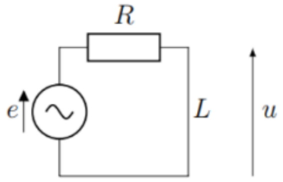
À HF : $Z_C = \dfrac{1}{C\omega} \to 0$: c'est un fil



u est la tension aux bornes d'un fil : $\boxed{u = 0}$

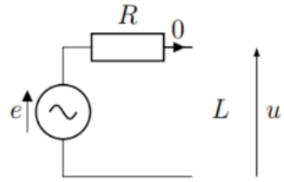
2.


À BF $Z_L = L\omega \to 0$: la bobine est un fil

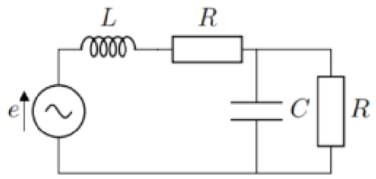


u est la tension aux bornes d'un fil, donc $\boxed{u = 0}$

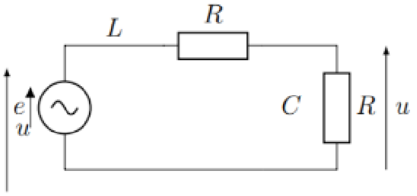
À HF, $Z_L = L\omega \to \infty$: la bobi est un interrupteur ouvert



Loi des mailles : $\boxed{u = e}$

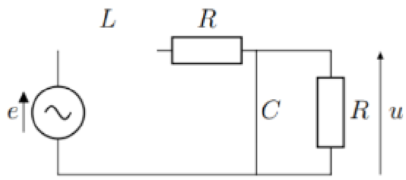
3.


À BF



Pont diviseur de tension : $u = \dfrac{e}{2}$

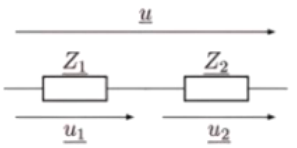
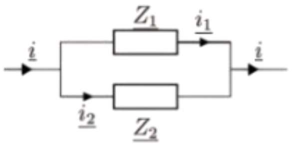
À HF



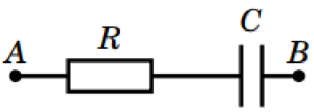
u est la tension aux bornes d'un fil, donc $u = 0$

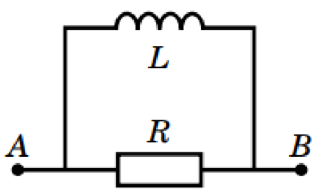
3. Généralisation des théorèmes : associations et ponts diviseurs

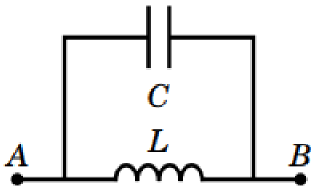
Les théorèmes démontrés à partir de la loi d'Ohm peuvent être généralisées en régime sinusoïdal forcé avec la notation complexe (*associations de dipôles équivalents et ponts diviseurs*).

Série	Dérivation
	
Impédance équivalente : $\underline{Z_{éq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$	Impédance équivalente : $\frac{1}{\underline{Z_{éq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} \Leftrightarrow \underline{Z_{éq}} = \frac{\underline{Z_1}.\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$
Pont diviseur de tension : $\underline{u_1} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\underline{u}$	Pont diviseur de courant : $\underline{i_1} = \frac{\frac{1}{\underline{Z_1}}}{\frac{1}{\underline{Z_1}}+\frac{1}{\underline{Z_2}}}\underline{i}$

Enoncé : *Pour chacun des circuits suivants, exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_{AB}}$ équivalente au dipôle AB. On notera ω la pulsation des grandeurs électriques.*



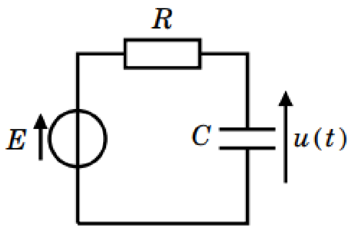


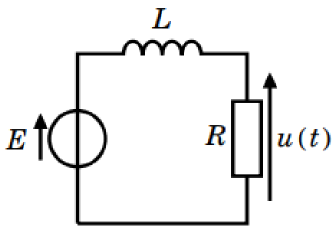


Correction :

$$\underline{Z}_{AB}^{(1)} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} = \frac{1+\mathrm{j}C\omega}{\mathrm{j}C\omega} \qquad \underline{Z}_{AB}^{(2)} = \frac{R\mathrm{j}L\omega}{R+\mathrm{j}L\omega} = R\frac{\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}{1+\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega} \qquad \underline{Z}_{AB}^{(3)} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\mathrm{j}L\omega}{1/\mathrm{j}C\omega+\mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-LC\omega^2}$$

Enoncé : *Etablir les expressions de $\underline{u}(t)$ en fonction de $\underline{e} = E_0 e^{j\omega t}$ pour les circuits ci-dessous.*





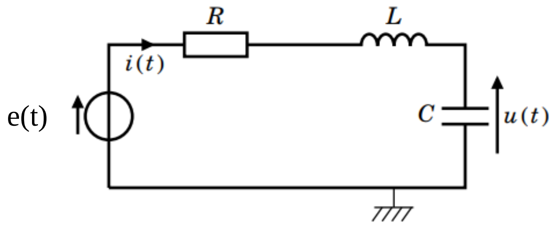
Correction :

$$\underline{u} = \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad ; \quad \underline{u} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

III] Etude du RLC série en régime sinusoïdal forcé : résonance en tension

1. Mise en équation ★

On revient sur le problème du circuit RLC série alimenté par un générateur idéal qui délivre une tension sinusoïdale **e(*t*) = *E*cos(*ωt*).**



On s'intéresse à la réponse en tension $\boldsymbol{u(t)}$ que l'on cherche sous la forme :

$$\boldsymbol{u(t) = Ucos(\omega t + \varphi)}$$

Pour poursuivre la résolution, on passe en représentation complexe (les grandeurs sont linéaires):

$$\boldsymbol{e(t) = \underline{E}e^{j\omega t} = Ee^{j\omega t}}$$

$$\boldsymbol{\underline{u}(t) = Ue^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{U}e^{j\omega t}}, \text{ avec } \boldsymbol{\underline{U} = Ue^{j\varphi}}$$

On exprime l'amplitude complexe $\boldsymbol{\underline{U}}$ grâce à un pont diviseur de tension :

$$\boldsymbol{\underline{U} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_L} + \underline{Z_R} + \underline{Z_C}} \times \underline{E} = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega} \times E = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \times E}$$

On peut écrire ce résultat avec les paramètres canoniques $\boldsymbol{\omega_0}$ et $\boldsymbol{Q}$ du RLC série :

$$\boldsymbol{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$\boldsymbol{\underline{U} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} \times E}$$

Pour alléger les calculs, on introduit la pulsation réduite $\boldsymbol{x = \frac{\omega}{\omega_0}}$ ($\boldsymbol{x}$ est sans dimension et positif).

$$\boxed{\boldsymbol{\underline{U} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \times E}}$$

2. Calcul d'amplitude et phase ★

On étudie l'amplitude $\mathbf{U(\omega)}$ et l'avance de phase $\boldsymbol{\varphi(\omega)}$ de la réponse en tension du RLC série :

Calculons le module et l'argument de la tension complexe :

$$\mathbf{U} = |\underline{U}| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2}} \times E$$

$$\varphi = arg(\underline{U}) = -arg(1 - x^2 + j\frac{x}{Q})$$

On ne peut pas passer directement à l'arctangente pour calculer $arg(\underline{U})$ car la partie réelle de $\underline{U}$ peut-être négative, ainsi factorisons d'abord l'expression par $j\frac{x}{Q}$:

$$\varphi = -arg(j\frac{x}{Q} \times \left(-jQ\frac{1}{x} + jQx + 1\right))$$

$$\varphi = -arg(j\frac{x}{Q} \times \left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right))$$

$$\varphi = -arg\left(j\frac{x}{Q}\right) - arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - arctan(Q\left(x - \frac{1}{x}\right))$$

3. Limites hautes et basses fréquences ★

***Enoncé :** Déterminer les limites haute et basse fréquence de l'amplitude* $\mathbf{U}$ *et de la phase* $\boldsymbol{\varphi}$*.*

Correction :

Pour l'amplitude **U** :

- A basse fréquence, soit $\omega \ll \omega_0$ ou $x \to 0$, on a $\mathbf{U} \to E$. Le condensateur se comporte comme un interupteur ouver et la réponse en tension « suit » l'excitation.
- A haute fréquence**,** soit $\omega \gg \omega_0$ ou $x \to \infty$**,** on a $\mathbf{U} \to 0$**.** Le condensateur se comporte comme un fil et la réponse en tension tend vers **0**.

Pour l'avance de phase φ :

- A basse fréquence, $\varphi \to 0$: la réponse **u(t)** est en phase sur **e(**t**).**
- A haute fréquence, $\varphi \to -\pi$: la réponse **u(t)** est en opposition de phase sur **e(**t**).**
- Pour $\omega = \omega_0$ ou $x = 1$, on a $\varphi = -\frac{\pi}{2}$: la réponse **u(t)** est en opposition de phase sur **e(**t**).**

4. Résonance ★

Etudions les variations de l'amplitude **U.** Posons la fonction ***f(x)*** tel que :

$$\mathbf{U} = \frac{E}{\sqrt{f(x)}}$$

Soit :

$$f(x) = (1 - x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2$$

Il y a résonance si $f(x)$ admet un minimum. Calculons sa dérivée et ses racines :

$$\frac{df}{dx} = 2(1 - x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2} = 2x(2x^2 + \frac{1}{Q^2} - 2)$$

$$\frac{df}{dx}(x_r) = 0 \Leftrightarrow {x_r}^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Il y a résonance si cette équation admet des solutions réelles, on en déduit **la condition de résonance sur Q** :

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2Q^2} < 1 \;\Leftrightarrow\; 2Q^2 > 1$$

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

La pulsation de résonance ω_r **est différente de la pulsation propre** ω_0 :

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

Pour finir, on calcule la valeur du pic de tension à la résonance $\mathbf{U}_{max}$ **:**

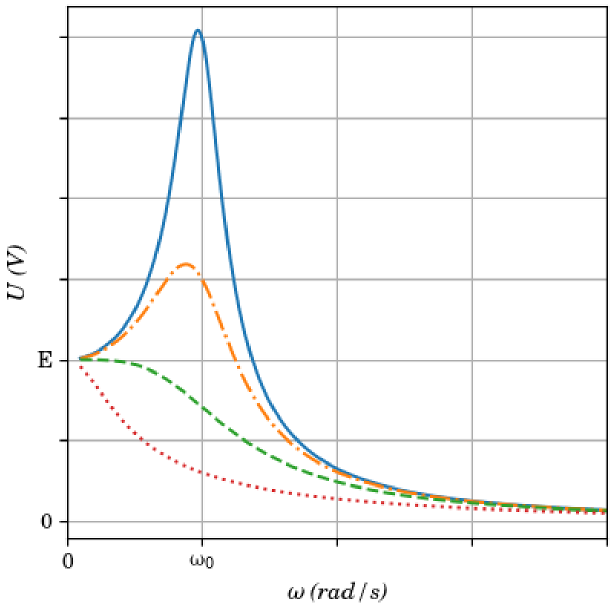
$$\mathbf{U}_{max} = U(x_r) = \frac{E}{\sqrt{f(x_r)}}$$

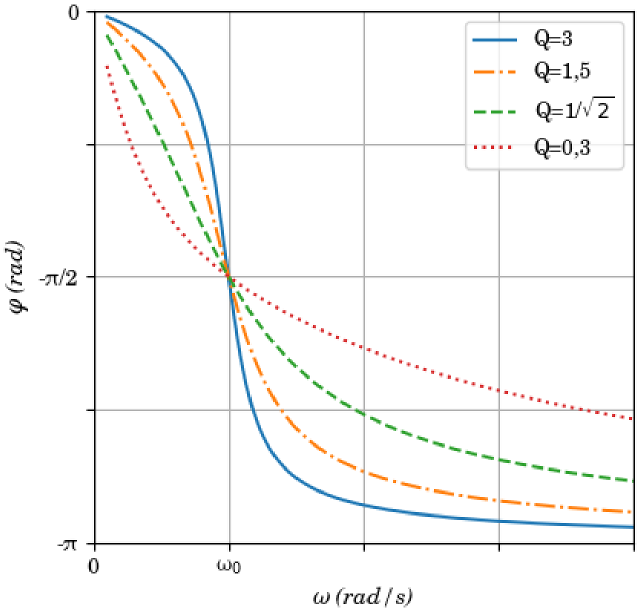
$$f(x_r) = (1 - (1 - \frac{1}{2Q^2}))^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) = \frac{1}{Q^2}(1 + \frac{1}{2Q^2})$$

$$\mathbf{U}_{max} = Q\frac{E}{\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}}}$$

$$\boxed{\mathbf{U}_{max} \xrightarrow[Q \gg 1]{} QE}$$

On trace les évolutions de l'amplitude **U** et de la phase φ en fonction de la pulsation ω.





IV] Etude du RLC série en régime sinusoïdal forcé : résonance en intensité (en exercice)

V] Analogie entre oscillateurs électrocinétique et mécanique

Expérience de cours :

On excite avec un déplacement sinusoïdal de la main un système masse-ressort. Appelons **z(t)** la position de la masse.

On observe l'évolution de la position de la masse en fonction de la fréquence d'excitation :

- A basse fréquence, la position de la masse suit le forçage.
- A haute fréquence, la postions de la masse n'évolue pas.
- Entre les deux, la masse oscille avec une amplitude maximale, il y a **résonance en position**.

En rapprochant les équations différentielles des oscillateurs électrocinétiques et mécaniques, on peut dresser des analogies.

La réponse en tension de l'oscillateur électrique est analogue à la réponse en position de l'oscillateur mécanique de même que la réponse en intensité est analogue à la réponse en vitesse.

Grandeur	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrocinétique
Grandeurs cinématiques	z	$u = \frac{q}{C}$
	$\dot{z} = \frac{dz}{dt}$	$i = \frac{dq}{dt}$
Inertie	m	L
Coefficient de rappel	k	$\frac{1}{C}$
Coefficient de frottement	α	R
Equation différentielle	$m\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha\frac{dz}{dt} + kz = kA\cos(\omega t)$	$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = E\cos(\omega t)$
Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité Q	$Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Réponse en position	$\underline{Z} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \times A$	$\underline{U} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \times E$
Réponse en vitesse	$\underline{V} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \times \frac{kA}{\alpha}$	$\underline{I} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \times \frac{E}{R}$