Exercices d'application :

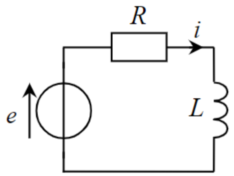
☐ Exercice 11.1. Notation complexe et notation temporelle ★

Déterminer les amplitudes complexes associées aux grandeurs suivantes (sans dimension), puis préciser leurs modules et arguments.

1. $u(t)=3\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$. **2.** $s(t)=-2\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$. **3.** $i(t)=4\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)$.

☐ Exercice 11.2. Circuit RL en régime sinusoïdal forcé ★

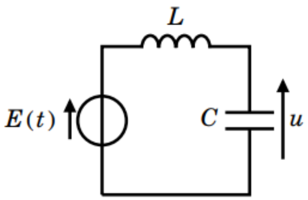
On considère un générateur de tension $e(t)=E\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$.



1. Ce générateur alimente un dipôle RL série. Donner l'expression du courant complexe $\underline{i}(t)$ qui traverse le dipôle, puis en déduire $i(t)$.

☐ Exercice 11.3. Résonance d'un Circuit LC ★

On considère le circuit ci-contre, dans lequel le générateur impose une tension sinusoïdale $E(t)=E_0\cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé.



1 – Établir la réponse en tension $u(t)$ sans utiliser la représentation complexe. On identifiera la pulsation propre du système.

2 – Établir la réponse en tension $\underline{u}$ en utilisant directement la représentation complexe.

3 – Que dire de l'avance de phase $\varphi_{u/E}$?

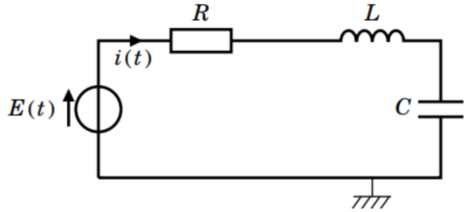
4 – Montrer que la tension u est soumise au phénomène de résonance pour une fréquence de résonance f_r que l'on exprimera en fonction de L et C. Faire l'application numérique pour $L=1{,}0\,\mathrm{mH}$ et $C=100\,\mathrm{nF}$.

5 – Que dire de l'amplitude de u à la résonance ? Interpréter ce résultat par rapport à vos connaissances sur le RLC amorti.

Exercices d'entraînement :

☐ Exercice 11.4. Résonance en intensité d'un circuit RLC série ★★

On étudie la réponse en courant $\boldsymbol{i(t)}$ du circuit RLC série.



Le générateur idéal de tension délivre une tension ***e*(*t*) = *E* cos(*ωt*).**

On cherche la réponse en intensité $\boldsymbol{i(t)}$ sous forme $\boldsymbol{i(t) = I\cos(\omega t+\phi)}$.

Partie 1 : Réponse en intensité

1. Donner les représentations complexe $\underline{\boldsymbol{i(t)}}$ et $\underline{\boldsymbol{e(t)}}$ associées à $\boldsymbol{i(t)}$ *et* $\boldsymbol{e(t)}$.

2. Déterminer l'amplitude complexe $\underline{\boldsymbol{I}}$ de l'intensité en fonction d**e R, L, C, E** et **ω.**

3. Montrer que cette amplitude complexe $\underline{\boldsymbol{I}}$ peut s'exprimer sous la forme :

$$\underline{\boldsymbol{I}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{jQ}\left(\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)}\times\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}}$$

Avec $\boldsymbol{x}=\frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite et **Q** le facteur de qualité.

Donner les expressions de **Q** et $\boldsymbol{\omega_0}$ en fonction de **R, L** et **C.**

4. En déduire l'expression de l'amplitude réelle $\boldsymbol{I}$. Déterminer sa limite de lorsque $\boldsymbol{\omega}\to\mathbf{0}$ et lorsque $\boldsymbol{\omega}\to\infty$**.**

5. Déterminer la valeur de la pulsation de résonance $\boldsymbol{\omega_c}$ en fonction de $\boldsymbol{\omega_0}$. La résonance en intensité existe-t-elle quelque soit la valeur de **Q** ?

6. Déterminer la valeur du pic d'intensité à la résonance I_{max} en fonction de **Q, C, E** et ω_0.

7. Déterminer l'expression de la phase à l'origine ϕ. Déterminer les limites de ϕ aux basses fréquences, aux hautes fréquence et à la pulsation propre ω_0.

Partie 2 : Acuité de la résonance

On s'intéresse à l'impact du facteur de qualité sur l'acuité de la résonance.

On définit la pulsation de coupure ω_c tel que $I(\omega_c) = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$. Ainsi que la bande passante à -3 dB $\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1}$. *(cf. schéma ci-contre)*

8. Montrer que les pulsations de coupure réduites $x_c = \frac{\omega_c}{\omega_0}$ vérifient l'équation :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x_c - \frac{1}{x_c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

9. En déduire que les pulsations de coupure réduites x_c sont solutions du trinôme :

$$x_c{}^2 \pm \frac{1}{Q} x_c - 1 = 0$$

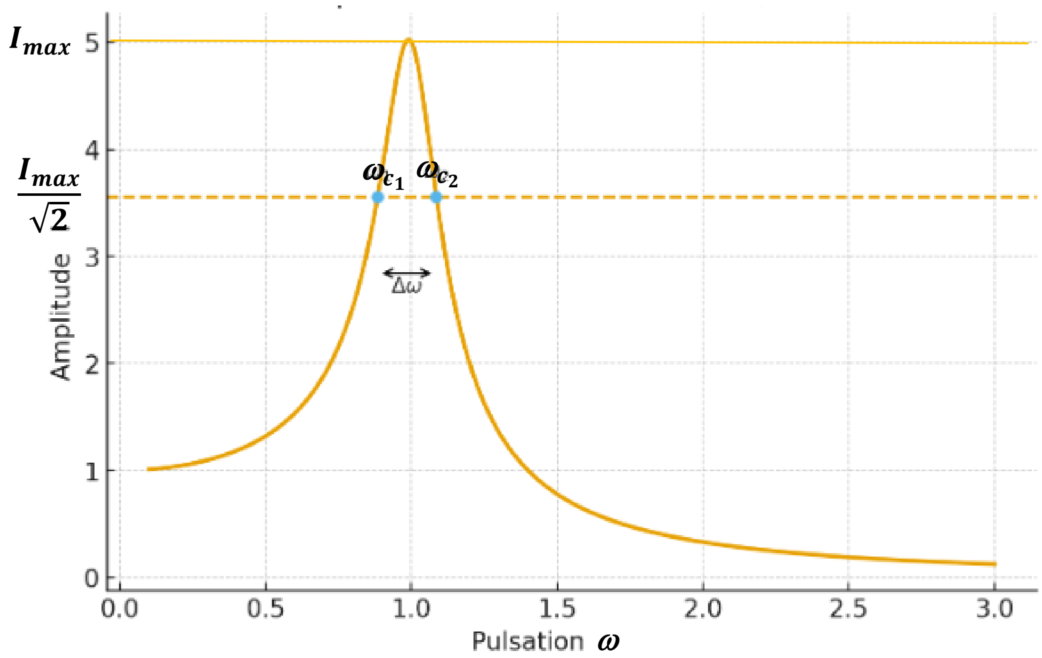
10. Calculer le discriminant Δ du trinôme, en déduire les racines $x_{c_{1,2}}$ en ne considérant que les valeurs positives : $x_{c_{1,2}} > 0$.

11. Montrer que la bande passante réduite à -3dB Δx peut s'exprimer :

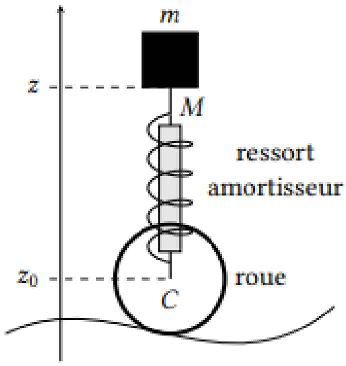
$$\Delta x = x_{c_2} - x_{c_1} = \frac{1}{Q}$$

12. Finalement, en déduire une expression du facteur de qualité en fonction de la pulsation propre ω_0 et de la bande passante à -3dB $\Delta\omega$.

Interpréter l'expression obtenue.



☐ Exercice 11.5. Exercice bilan : Suspension d'un VTT



Le but de cet exercice est d'étudier les caractéristiques d'une suspension de VTT. Le VTT est modélisé par un solide de masse m décrivant le cadre et le vététiste, repéré par la position d'un point M, posé sur une unique suspension. L'effet de la roue arrière n'est pas pris en compte.

La suspension est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 attaché en M dont l'autre extrémité est fixée au centre C de la roue, qui suit exactement le profil du chemin. Les positions de M et C sont repérées par leurs abscisses z et z_0 sur un axe vertical Oz ascendant tel que $z_0 = 0$ correspond à la position moyenne du chemin. Outre le ressort, la suspension contient un amortisseur fluide de coefficient d'amortissement α. L'effet de l'amortisseur sur le mouvement de M se modélise par une force

$$\vec{F}_a = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_0)\vec{u}_z$$

où $v\dot{z}$ et $\dot{z}_0$ sont les vitesses verticales respectives de M et C. La raideur k et le coefficient α peuvent être réglés par l'intermédiaire de la pression en huile et en air dans la suspension.

1 - Lorsque le VTT se déplace sur une route plate et lisse, $z_0 = 0$, et la cote z est constante, de valeur z_e, en régime dit stabilisé. Déterminer z_e en fonction de m, g, k et L_0.

2 - Considérons maintenant le VTT se déplaçant sur un chemin bosselé. On pose $Z(t) = z(t) - z_e$. Montrer que $Z(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F(t)\,,$$

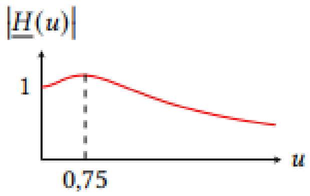
où $F(t)$ est une fonction à déterminer, dépendant de z_0, de v_0 et des constantes α et k caractéristiques de la suspension. Préciser le sens physique de F.

3 - On considère le cas où le profil du chemin est tel que $F(t)$ est une fonction sinusoïdale d'amplitude F_m et de pulsation ω. Justifier que la vitesse v d'oscillation verticale du VTT est également sinusoïdale de même pulsation que F. Calculer son amplitude V_m en fonction de F_m.

4 - La fonction de transfert de la suspension est définie par $\underline{H} = \underline{Z}/\underline{z_0}$, et on introduit les paramètres adimensionnés

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \qquad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \qquad \text{et} \qquad u = \frac{\omega}{\omega_0}\,.$$

Que représente physiquement $\underline{H}$? Exprimer $\underline{H}$ en fonction de ξ et u.



Pour un VTT se déplaçant à la vitesse V sur un chemin fait de cailloux de taille ℓ, le spectre d'excitation est maximal autour de $\omega = 2\pi V/\ell$. La figure ci-contre représente l'allure de $|\underline{H}(u)|$ pour $\xi = 1$.

5 - Pour un meilleur confort, vaut-il mieux rouler vite ou lentement ? Commenter.

Correction de l'exercice bilan : Suspension d'un VTT

Tout au long de l'exercice, le système étudié est l'ensemble du cadre et du vététiste, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. Ce système est soumis à son poids $\vec{P}$, à la force $\vec{F}_r$ de rappel du ressort de la suspension et à la force $\vec{F}_a$ exercée par l'amortisseur.

$\boxed{1}$ Comme $z = z_e$ et $z_0 = 0$ sont des constantes, l'amortisseur n'exerce aucune force sur le vététiste, et la longueur du ressort est égale à z. La position d'équilibre est celle où la force exercée par le ressort sur M compense exactement le poids du VTT, soit

$$\vec{P} + \vec{F}_r = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad -mg\,\vec{u}_z - k(z_e - L_0)\,\vec{u}_z = \vec{0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{z_e = L_0 - \frac{mg}{k}}.$$

Le ressort est plus court qu'à vide, ce qui est logique à cause du poids du vélo et du vététiste.

$\boxed{2}$ Appliquons la loi de la quantité de mouvement au cadre du VTT dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids et aux forces exercées par le ressort et l'amortisseur. Ainsi,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{F}_a \qquad \text{soit} \qquad m\ddot{z}\,\vec{u}_z = -mg\,\vec{u}_z - k\left[(z - z_0) - L_0\right]\vec{u}_z - \alpha(\dot{z} - \dot{z}_0)\,\vec{u}_z\,.$$

En projetant et en remplaçant z par $Z + z_e$ (donc $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$), on obtient

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = -mg - k(z_e - z_0) + kL_0 - \alpha\dot{z}_0$$

ce qui donne en remplaçant z_e par son expression

$$\boxed{m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F \qquad \text{avec} \qquad F = kz_0 + \alpha\dot{z}_0}$$

F s'interprète comme une force verticale ressentie par le cadre en raison du caractère non plat du chemin. Vous avez tous déjà ressenti cet effet en voiture, par exemple en passant sur un dos d'âne.

$\boxed{3}$ Le VTT est en mouvement forcé, par un forçage F sinusoïdal. Une fois le régime permanent atteint, ce qui est implicitement supposé, toutes les grandeurs dynamiques sont sinusoïdales de même pulsation que le forçage, et en particulier la vitesse v_z.

On utilise la représentation complexe pour déterminer son amplitude : $\underline{F} = F_m\, e^{j\omega t}$ et $\underline{v_z} = V_m\, e^{j(\omega t + \varphi)}$. Comme $v_z = \dot{z} = \dot{Z}$, $\underline{v} = j\omega\underline{Z}$. Passons l'équation différentielle obtenue en représentation complexe,

$$m(j\omega)^2\underline{Z} + \alpha j\omega\underline{Z} + k\underline{Z} = \underline{F} \qquad \text{d'où} \qquad mj\omega\underline{v_z} + \alpha\underline{v_z} + k\frac{\underline{v_z}}{j\omega} = \underline{F},$$

et ainsi

$$\underline{v_z} = \frac{\underline{F}}{mj\omega + \alpha - \dfrac{jk}{m}}$$

L'amplitude de la vitesse est au final

$$\boxed{V_m = |\underline{v_z}| = \frac{F_m}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)^2}}}$$

$\boxed{4}$ $\underline{H}$ représente la façon dont les oscillations du chemin (via $\underline{z_1}$) se répercutent sur le cadre (via $\underline{Z}$) par l'intermédiaire de la suspension, et sont donc ressenties par le vététiste. Comme $\underline{v_z} = j\omega\underline{Z}$ et $\underline{F} = k\underline{z_0} + j\omega\alpha\underline{z_0}$, on obtient en remplaçant dans l'expression de $\underline{v_z}$ obtenue à la question précédente

$$j\omega\underline{Z} = \frac{k\underline{z_0} + j\omega\alpha\underline{z_0}}{mj\omega + \alpha - \dfrac{jk}{m}}$$

d'où

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}}{\underline{z_0}} = \frac{k + j\alpha\omega}{k + j\alpha\omega - m\omega^2}$$

En utilisant $\alpha = 2\xi\sqrt{mk}$ et en divisant numérateur et dénominateur par k, on aboutit à

$$\boxed{\underline{H}(u) = \frac{1 + 2j\xi u}{1 - u^2 + 2j\xi u}}$$

$\boxed{5}$ Pour ressentir le moins possible les vibrations dues aux cailloux, il faut que $|\underline{H}|$ soit aussi petit que possible, et éviter absolument la situation de résonance. D'après la figure, cela correspond à $u \gg 1$, soit une pulsation ω élevée, donc à une vitesse élevée. **Pour minimiser les vibrations, il faut donc rouler aussi vite que possible sur les cailloux**. Évidemment, il en va tout autrement de l'adhérence !