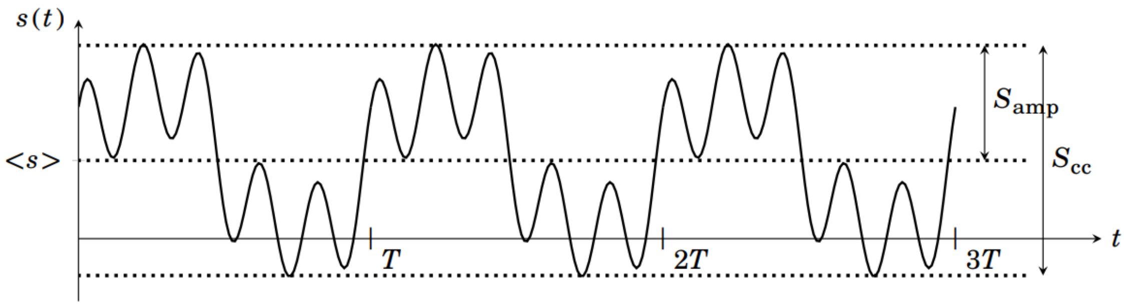
I] Signaux périodiques

1. Période, fréquence et pulsation

Un signal périodique est composé d'un motif qui se répète après un temps T appelé **période**.



On définit la fréquence $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ comme le nombre de périodes par unité de temps, son unité est le **Hz** homogène à l'inverse d'un temps : $\dim(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{T^{-1}}$.

Il est aussi utile de définir la pulsation $\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$ (ω se lit « oméga »).

On trouve cette grandeur dans l'écriture mathématique des signaux car elle transforme les fonctions trigonométriques (*cosinus et sinus, de période 2π*) en fonctions périodiques de période T.

2. Moyenne, amplitude

La **valeur moyenne** $< s(t) >$ d'un signal périodique se calcule par la formule suivante :

$$\boxed{< s(t) >_T = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\, dt}$$

Remarque : La moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle.

$$< S\cos(\omega t + \varphi) >_T = \frac{1}{T}\int_0^T S\cos(\omega t + \varphi)\, dt = 0$$

L'**amplitude** d'un signal est la différence entre la valeur maximale du signal et sa moyenne :

$$s_{amp} = s_{max} - < s >_T$$

On définit aussi **l'amplitude crête à crête** comme la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale du signal.

$$s_{cc} = s_{max} - s_{min} = 2 \times s_{amp}$$

3. Valeur efficace

L'énergie est une grandeur fondamentale et transversale en physique, la valeur efficace rend compte de l'énergie moyenne sur une période transportée par un signal.

Nous avons déjà rencontré plusieurs grandeurs énergétiques (l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$, l'énergie élastique $\frac{1}{2}kx^2$, les énergies liées à des bobines ou des condensateurs $\frac{1}{2}Li^2$, $\frac{1}{2}Cu^2$.

Les grandeurs énergétiques sont proportionnelles aux carrés des amplitudes de signaux. Ainsi, on définit la valeur efficace : *(la racine carré permet de garder la même dimension que l'amplitude).*

$$\boxed{s_{eff} = \sqrt{< s(t) >_T{}^2} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt}}$$

Application : Calculer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$.

Solution :

Commençons par linéariser $(\cos u)^2$:

$$(\cos u)^2 = (\frac{e^{-ju} + e^{ju}}{2})^2 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{e^{-2ju} + e^{2ju} + 2}{2}\right) = \frac{1}{2}\times(\cos(2u) + 1)$$

Ainsi, il vient :

$$s_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [S\cos(\omega t + \varphi)]^2\,dt}$$

$$s_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}S^2\int_0^T \frac{1}{2}\times[\cos(2\omega t + 2\varphi) + 1]\,dt}$$

$$s_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}S^2[\int_0^T \frac{1}{2}\times\cos(2\omega t + 2\varphi)\,dt + \int_0^T \frac{1}{2}dt]}$$

$$s_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}S^2[\frac{\sin(2\omega t + 2\varphi)}{2\times 2\omega}]_0^T + \frac{1}{T}S^2[\frac{t}{2}]_0^T}$$

$$s_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}S^2\frac{T}{2}} = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Un signal sinusoïdal $s_1(t) = S_1\cos(\omega t + \varphi)$ d'amplitude S_1 transporte la même quantité d'énergie d'un signal continu de même nature $s_2(t) = S_2$ avec $S_2 = s_{1,eff} = \frac{S_1}{\sqrt{2}}$.

II) Décomposition spectrale des signaux

1. Théorème de Fourier

Le mathématicien Joseph Fourier (1758-1830) à montré qu'un signal périodique quelconque de fréquence $f_1 = \frac{1}{T_1}$ peut s'écrire comme une somme infinie de signaux sinusoïdaux :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n) \qquad \text{avec} \quad f_n = n f_1$$

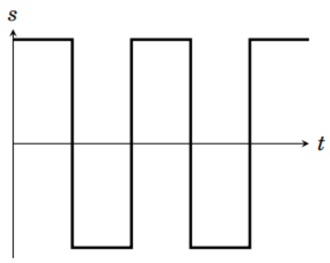
La fréquence f_1 se nomme le **fondamental**, et la fréquence f_n l'**harmonique de rang n**.

Le spectre d'un signal $s(t)$ périodique est la donnée des s_n pour toutes les fréquences f_n.

On le représente graphiquement par le tracé en abscisse des fréquences f_n et en ordonnée les amplitudes associées s_n.

*<u>Exemple</u> : Pour un signal carré de période T_1 , soit la fréquence f_1 et d'amplitude **A.***

$$s(t) = \begin{cases} A, & si\ t \in [nT_1; \left(n + \frac{1}{2}\right) T_1] \\ -A, & si\ t \in [\left(n + \frac{1}{2}\right) T_1; (n+1)T_1] \end{cases}$$

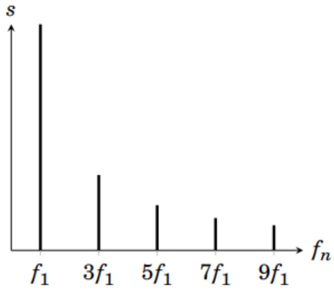


Signal carré $s(t)$

La décomposition en série de Fourier s'écrit :

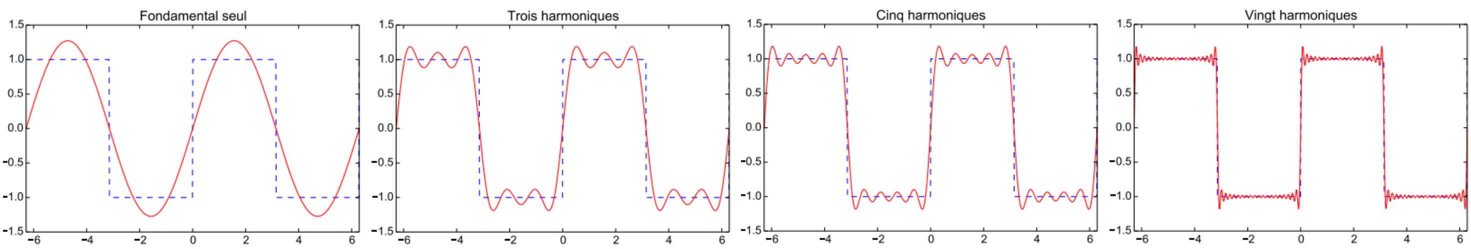
$$s(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} sin((2k+1)\omega_1 t)$$

$$s(t) = \frac{4A}{\pi} [sin(2\pi f_1 t) + \frac{1}{3} sin(6\pi f_1 t) + \frac{1}{5} sin(10\pi f_1 t) + ...]$$



Représentation du spectre $\hat{s}(f)$ du signal carré

On peut observer l'effet des harmoniques successives sur la forme du signal temporel.



On constate que les amplitudes des harmoniques décroissent rapidement avec leur rang. Ainsi, quelques harmoniques suffisent à rendre compte de la forme d'un signal périodique.

2. Valeur moyenne

Calculons la valeur moyenne d'un signal périodique de période $\boldsymbol{T_1}$.

Grâce à l'analyse de Fourier, on peut décomposer ce signal en somme de signaux sinusoïdaux avec $\boldsymbol{T_1}$ la période du fondamental :

$$< s(t) >_{T_1} = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} s(t)\,dt = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos\left(2\pi f_n t + \varphi_n\right) dt$$

$$< s(t) >_{T_1} = s_0 \cos\left(\varphi_0\right) + \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cos\left(2\pi f_n t + \varphi_n\right) dt = s_0 \cos\left(\varphi_0\right)$$

De plus, en prenant $\boldsymbol{\varphi_0 = 0}$, ce qui est généralement le cas, il vient :

$$< s(t) >_{T_1} = s_0$$

Dans le spectre d'un signal, l'harmonique de rang 0 correspond à la valeur moyenne du signal.

3. Valeur efficace

La valeur efficace d'un signal périodique quelconque est reliée à la somme des carrés des valeurs efficaces des harmoniques :

$$s_{eff}{}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} s_{n,eff}{}^2$$

Interprétation : *La puissance électrique transportée par un signal périodique est la somme des puissances électriques transportées par chacune de ses harmoniques.*

4. Cas des signaux non périodiques

Dans le cas des signaux non périodiques, la décomposition en série de Fourier se généralise à des fréquences $\boldsymbol{f}$ **continues** :

$$s(t) = \int_0^{\infty} \hat{s}(f) \times \cos(2\pi f t + \hat{\varphi}(f))\,df$$

Le théorème de Parseval (hors programme) établit par la conservation de l'énergie que l'intégrale du carré de l'amplitude dans le domaine temporel (*densité de puissance*) est égale à l'intégrale du carré de l'amplitude dans le domaine fréquentiel (*densité spectrale de puissance ou DSP*) :

$$\int_0^{\infty} s^2(t)\,dt = \int_0^{\infty} \hat{s}^2(f)\,df$$

5. Principe de superposition

Les systèmes linéaires respectent le principe de superposition : si on injecte un signal $x = x_1 + x_2$ en entrée, la réponse du système est $y = F(x_1) + F(x_2)$.

Grâce à ce principe et à l'analyse de Fourier, on peut étudier la réponse d'un système linéaire à n'importe quelle entrée :

- La décomposition spectrale permet de voir le signal d'entrée comme une somme de signaux sinusoïdaux.
- On étudie la réponse du système à un signal sinusoïdal de fréquence quelconque.
- On en déduit la réponse du système par somme des réponses aux signaux sinusoïdaux contenu dans le signal d'entrée.

III] Filtrage

1. Principe du filtrage

Le filtrage consiste à **sélectionner certaines fréquences** d'un signal complexe.

Exemples :

- *Dans une chaîne hi-fi, divers haut-parleurs sont adaptés à des fréquences différentes (tweeter, mid, subwoofer), il faut donc leur envoyer à chacun une partie du signal audio.*

- *La température varie de façon journalière, saisonnière, annuelle, ce qui correspond à des fréquences de plus en plus basses. Construire une cave en profondeur permet de stabiliser la température à laquelle le vin est conservé, donc à filtrer les hautes fréquences.*

- *Lorsque qu'on percute un diapason, on excite le système avec toutes les fréquences du spectre. Dans la réponse acoustique, seulement la fréquence La 440 Hz est présente.*

- *En téléphonie mobile ou en radio, on reçoit l'ensemble des ondes électromagnétiques qui traversent l'atmosphère, or seules certaines contiennent l'information, il s'agit donc d'isoler ces plages de fréquences.*

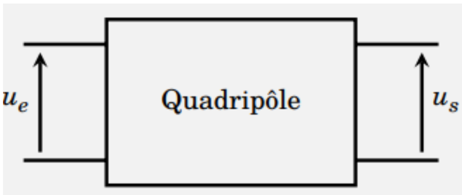
Un filtre conserve certaines fréquences tout en rejetant les autres. Il sera donc caractérisé par :

- La **fréquence principale** qu'il laisse passer et **la largeur de bande de fréquences** qu'il accepte autour de cette dernière.
- **L'efficacité avec laquelle il atténue les autres fréquences.**

2. Fonction de transfert d'un quadripôle

Un quadripôle est un composant électrique comportant **quatre bornes : deux d'entrée et deux de sortie.**

Le circuit branché à la sortie est appelé la **charge**.



Le but d'un quadripôle est généralement d'appliquer un **traitement au signal d'entré** (calcul de moyenne, intégration, filtrage, amplification…) et d'obtenir le signal traité aux bornes de sortie.

La **fonction de transfert** en tension d'un quadripôle **en régime sinusoïdal forcé** est la grandeur complexe définie par :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u_s(t)}}{\underline{u_e(t)}} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}}$$

Elle est caractérisée par :

- Son module, appelé gain $G(\omega) = \left|\underline{H}(\omega)\right|$.
- Son argument ou avance de phase de la sortie sur l'entrée $\varphi(\omega) = arg(\underline{H}(\omega))$

Le gain varie souvent sur plusieurs ordres de grandeur, on définit donc le gain en décibels :

$$G_{dB}(\omega) = 20\,log\big(G(\omega)\big) \Leftrightarrow G(\omega) = 10^{\frac{G_{dB}(\omega)}{20}}$$

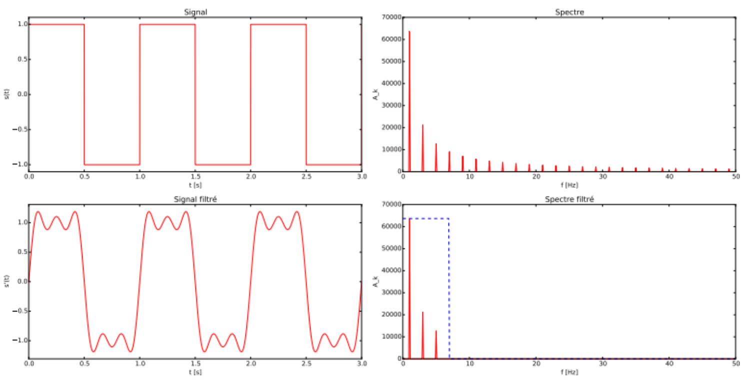
$G_{\mathrm{dB}}(\omega)$	40dB	20dB	0dB	−20dB	$-\infty$
$G(\omega) = \lvert\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\rvert$	10^2	10	1	10^{-1}	0

De même, on travaille souvent sur des intervalles de fréquences extrêmement larges, on représentera donc $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ selon une échelle logarithmique de ω (axe des abscisses).

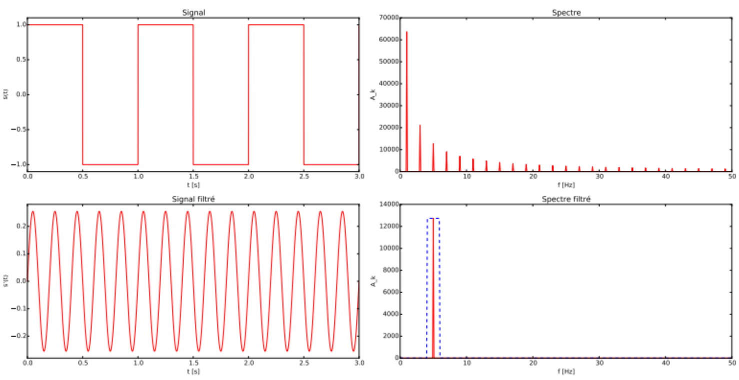
Un intervalle de fréquences correspondant à **un facteur 10 entre les fréquences extrêmes** est appelé **une décade**.

Le tracé de $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ est appelé **diagramme de Bode**.

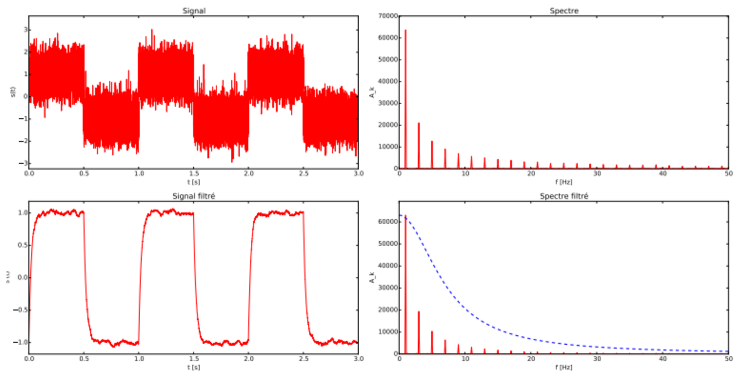
3. Exemple d'action de quelques filtres



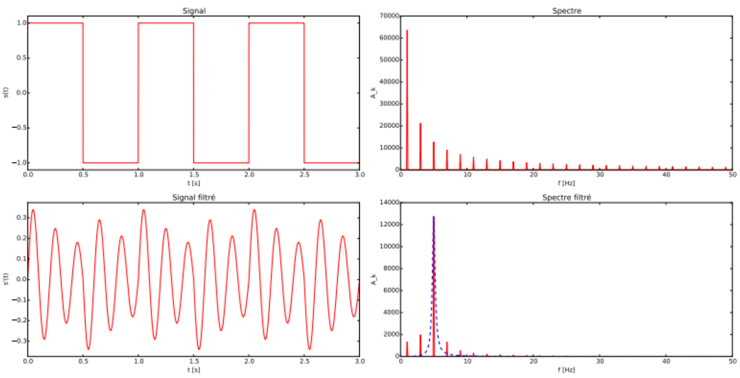
Passe-bas idéal



Passe-bande idéal



Passe-bas réel pour filtrer le bruit



Passe-bande réel

4. Caractéristiques des filtres

a. Pulsation de coupure

On définit la **pulsation de coupure ω_c** d'un filtre :

$$\boxed{G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}}$$

$$G_{dB}(\omega_c) = 20\,log\big(G(\omega_c)\big) = 20\,log\left(\frac{G_{max}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$G_{dB}(\omega_c) = 20\,log(G_{max}) - 20\,log(\sqrt{2})$$

$$G_{dB}(\omega_c) = 20\,log(G_{max}) - 10\,log(2)$$

$$\boxed{G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3}$$

On parle de pulsation de coupure à -**3 dB**.

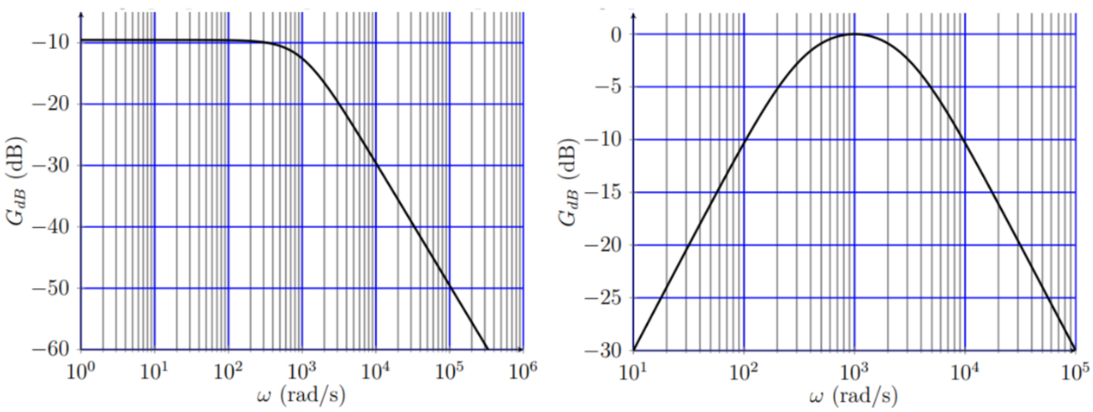
b. Bande passante

Pour le cas des filtres passe-bande, on définit **la bande passante à -3 dB**.

La bande passante d'un filtre est l'intervalle de fréquences dans lequel le gain est supérieur à $\frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$, c'est donc l'intervalle entre les fréquences de coupure. On le note Δf (ou $\Delta\omega$).

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1}}$$

<u>Application :</u> On a tracé ci-dessous les diagrammes de Bode en gain de deux filtres linéaires. Déterminer la nature de ces filtres (passe-bas, passe-haut, passe-bande ou réjecteur de bande), leurs pulsations de coupure et si elles existent, leurs bandes passantes à -3 dB.



<u>Correction :</u>
Graphe de gauche : $\omega_c \simeq 10^3$ rad.s^{-1} ; graphe de droite : $\omega_{c1} \simeq 3.10^2$ rad.s^{-1} et $\omega_{c2} \simeq 3.10^3$ rad.s^{-1}.

c. Asymptotes dans la zone de coupure

Pour caractériser l'efficacité d'atténuation d'un filtre, on s'intéresse à la pente des asymptotes dans le diagramme de Bode en gain.

Cas n°1. Si la pente est de **-20 dB/décade**, alors entre **deux fréquences séparées d'une décade f et $10f$**, la différence de gain vaut :

$$G_{dB}(10f) = G_{dB}(f) - 20 \Leftrightarrow 20\,log\left(\frac{G(10f)}{G(f)}\right) = -20 \Leftrightarrow G(10f) = \frac{1}{10}G(f)$$

Ainsi, multiplier la fréquence par 10 dans la zone de coupure diminue d'un facteur 10 les amplitudes des harmoniques correspondantes.

Cas n°2. Si la pente est de **-40 dB/décade**, alors entre **deux fréquences séparées d'une décade f et $10f$**, la différence de gain vaut :

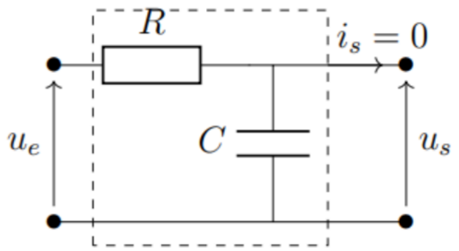
$$G_{dB}(10f) = G_{dB}(f) - 40 \Leftrightarrow 20\,log\left(\frac{G(10f)}{G(f)}\right) = -40 \Leftrightarrow G(10f) = \frac{1}{100}G(f)$$

Ainsi, multiplier la fréquence par 10 dans la zone de coupure diminue d'un facteur 100 les amplitudes des harmoniques correspondantes.

III] Filtres passifs du premier ordre ★

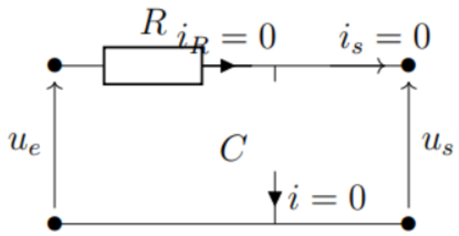
1. Filtre passe-bas, exemple du RC série

On étudie le quadripôle suivant constitué d'une résistance **R** et d'un condensateur de capacité **C**, alimenté par une tension sinusoïdale $\boldsymbol{u_e(t) = Ecos(\omega t)}$.



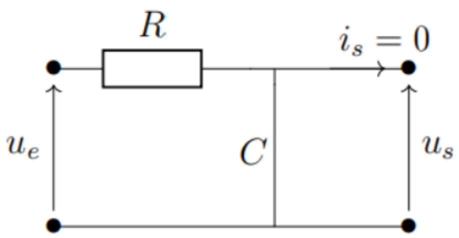
On considère la sortie ouverte ($\boldsymbol{i_s = 0}$), ce qui est vérifié lorsqu'on branche en sortie un oscilloscope dont la résistance d'entrée est $\boldsymbol{R_e = 1\,M\Omega \gg R\ et\ \frac{1}{C\omega}}$.

a. *Comportement qualitatif*



A basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Par la loi des nœuds, $i_R = 0$. La loi des mailles donne : $u_s = u_e$. Le filtre transmet les signaux.



A haute fréquence, le condensateur est équivalent à un fil.

u_s est la tension aux bornes d'un fil donc $u_s = 0$.
le filtre ne transmet pas les signaux.

Il s'agit d'un filtre passe-bas

b. Fonction de transfert

Déterminons la fonction de transfert du filtre en utilisant un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_s(t)} = \underline{u_e(t)} \times \frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_c}}$$

$$\underline{H(\omega)} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\boxed{\underline{H(\omega)} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

Avec $H_0 = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

On peut calculer le gain $G(\omega)$ et l'avance de phase $\varphi(\omega)$ en fonction de la fréquence :

$$G(\omega) = \left|\underline{H(\omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

$$G_{dB} = 20\,log(G) = -20 \times [\frac{1}{2}(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2)] = -10 \times [1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2]$$

$$\varphi(\omega) = -arctan(\frac{\omega}{\omega_0})$$

c. Tracé du diagramme de Bode

Déterminons par le calcul les comportements asymptotiques du filtre en gain et en phase à haute et basse fréquence ainsi qu'à la pulsation de coupure.

<u>**A basse fréquence**</u> : $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ donc $\underline{H_{BF}} \simeq 1$, on en déduit :

$$G_{BF}(\omega) = \left|\underline{H_{BF}}\right| = 1 \Leftrightarrow G_{dB,BF} = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{BF}(\omega) = 0$$

Le diagramme en gain présente une asymptote horizontale à 0 dB et celui en phase aussi.

<u>**A haute fréquence**</u> : $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ donc $\underline{H_{BF}} \simeq \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$, on en déduit :

$$\boldsymbol{G_{HF}(\omega) = \left|\underline{H_{BF}}\right| = \frac{\omega_0}{\omega} \Leftrightarrow G_{dB,HF} = -20\,log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi_{HF}(\omega) = -\frac{\pi}{2}}$$

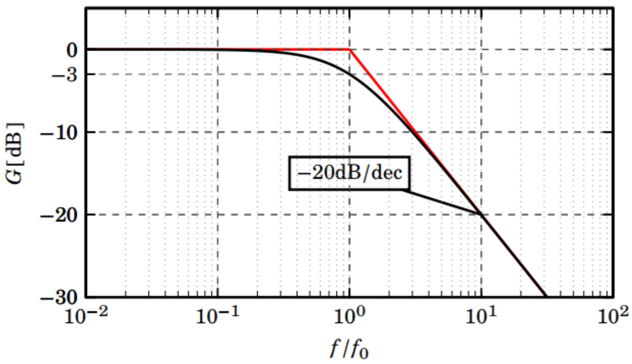
Le diagramme en gain présente une asymptote oblique de pente -20 dB/décade et celui en phase une asymptote horizontale en $-\frac{\pi}{2}$.

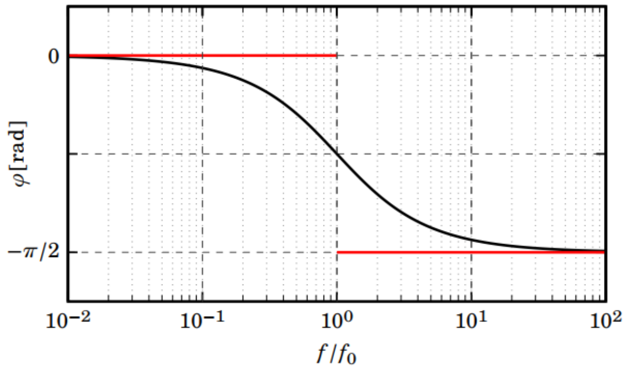
<u>A la pulsation de coupure ω_c :</u>

$$\boldsymbol{G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_c}{\omega_0})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

$$\boldsymbol{\varphi(\omega_c) = -arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right) = -arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right) = -\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi on peut tracer les diagrammes de Bode asymptotique et réel en gain et en phase :g

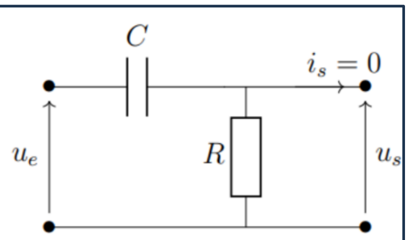




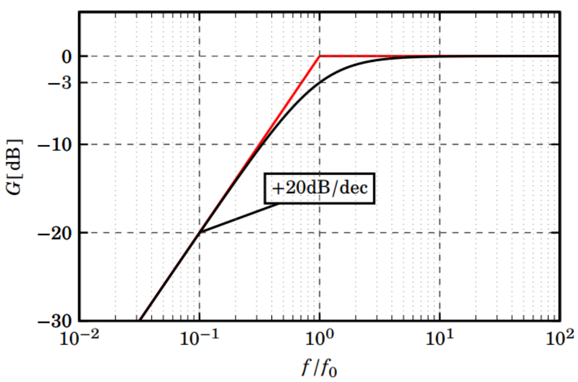
2. <u>Filtre passe-haut, exemple du CR série</u>

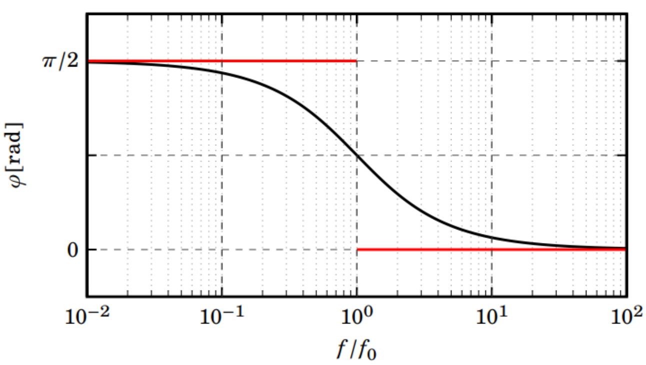
<u>Application :</u> Soit le quadripôle ci-contre alimenté par une tension sinusoïdale $\boldsymbol{u_e(t) = E\,cos(\omega t)}$*.*
On le considère en sortie ouverte, donc $\boldsymbol{i_s = 0}$*.*

Etudier le comportement en gain et en phase de ce filtre puis tracer son diagramme de Bode.



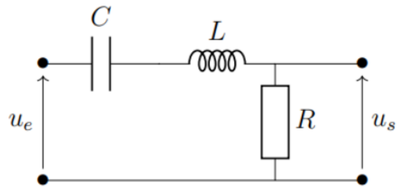
<u>Correction :</u>





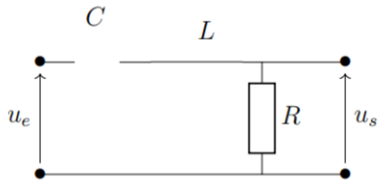
IV] Filtres passifs du deuxième ordre ★

1. Filtre passe-bande, exemple du LCR série



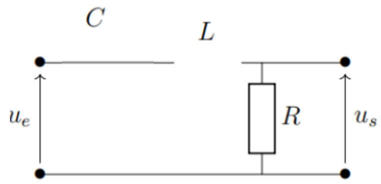
Soit le quadripôle ci-contre alimenté par une tension sinusoïdale $\boldsymbol{u_e(t) = E\,cos(\omega t)}$. On le considère en sortie ouverte, donc $\boldsymbol{i_s = 0}$.

a. *Comportement qualitatif*



A BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil.

u_s = 0 : le filtre ne transmet pas les signaux à basses fréquences.



A HF, le condensateur est équivalent à un fil et la bobine à un interrupteur ouvert.

u_s = 0 : le filtre ne transmet pas les signaux à hautes fréquences.

Il s'agit d'un filtre passe-bande

b. *Fonction de transfert*

Déterminons la fonction de transfert du filtre en utilisant un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_s}(t) = \underline{u_e}(t) \times \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_c} + \underline{Z_L}}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega} + j\frac{L}{R}\omega}$$

Que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

Avec $H_0 = 1,\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

On peut calculer le gain $G(\omega)$ et l'avance de phase $\varphi(\omega)$ en fonction de la fréquence :

$$G(\omega) = \left|\underline{H}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

$$G_{dB} = 20\ log(G) = -20 \times [\frac{1}{2}(1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2)] = -10 \times [1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2]$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

c. Tracé du diagramme de Bode

<u>A basse fréquence</u> : $\frac{\omega_0}{\omega} \gg \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\frac{\omega_0}{\omega} \gg 1$ donc $\underline{H_{BF}} \simeq \frac{1}{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{j\omega}{Q\omega_0}$, on en déduit :

$$G_{BF}(\omega) = |\underline{H_{BF}}| = \frac{\omega}{Q\omega_0} \Leftrightarrow G_{dB,BF} = 20\ log(\omega) - 20\ log(Q\omega_0) \text{ et } \varphi_{BF}(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

Le diagramme en gain présente une asymptote oblique de pente +20 dB/décade et celui en phase une asymptote horizontale à $\frac{\pi}{2}$.

<u>A haute fréquence</u> : $\frac{\omega}{\omega_0} \gg \frac{\omega_0}{\omega}$ et $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ donc $\underline{H_{HF}} \simeq \frac{1}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} = -\frac{j\omega_0}{Q\omega}$, on en déduit :

$$G_{HF}(\omega) = |\underline{H_{BF}}| = \frac{\omega_0}{Q\omega} \Leftrightarrow G_{dB,HF} = 20\ log\left(\frac{\omega_0}{Q}\right) - 20\ log(\omega) \quad \text{et} \quad \varphi_{HF}(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

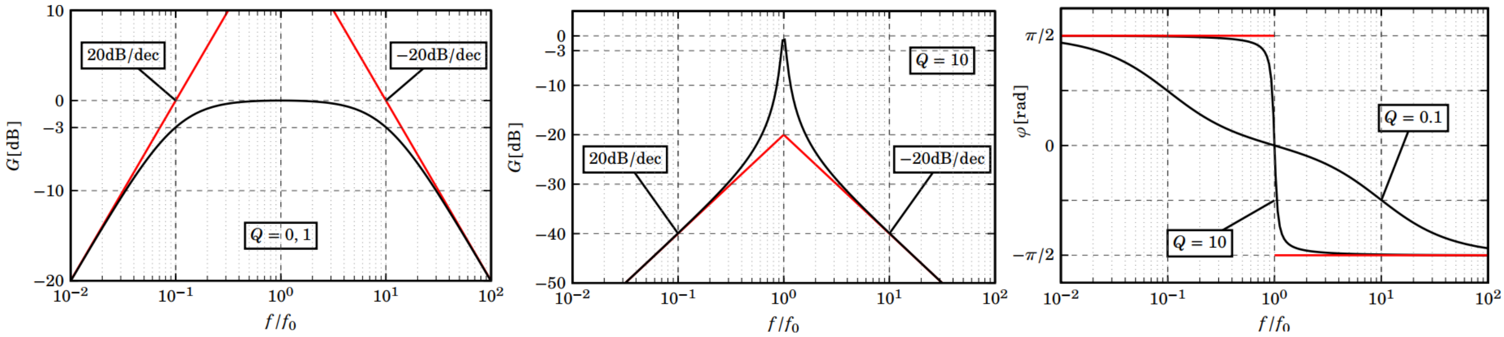
Le diagramme en gain présente une asymptote oblique de pente -20 dB/décade et celui en phase une asymptote horizontale en $-\frac{\pi}{2}$.

<u>La bande passante à -3 dB vaut :</u>

$$\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{\omega_0}{Q}$$

Pour le calcul complet, on se réfèrera à l'exercice sur la résonance en intensité du TD sur les oscillateurs en régime sinusoïdal forcé.

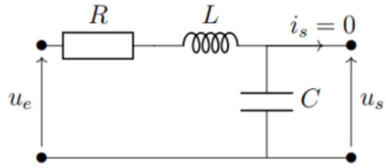
Ainsi on peut tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels en pour différents facteurs de qualité **Q** :



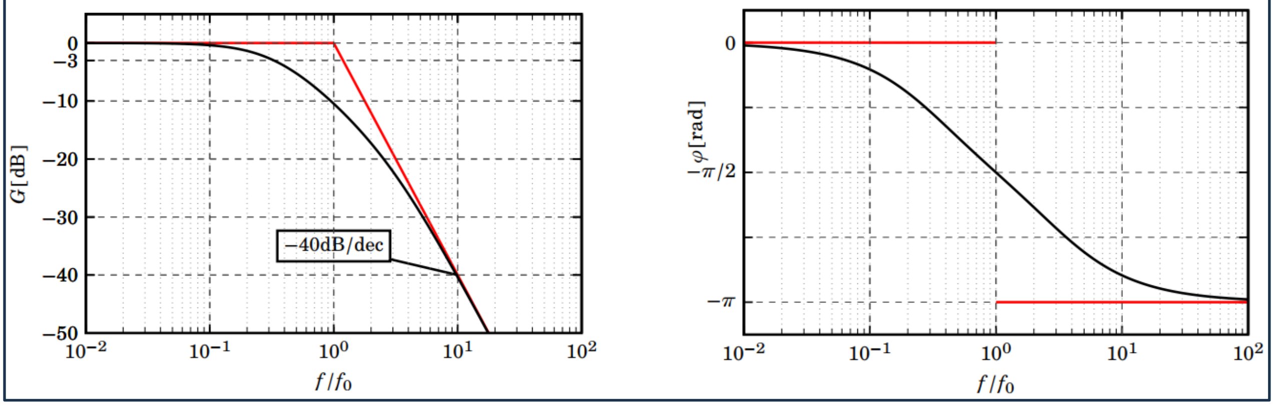
2. Filtre passe-bas, exemple du RLC série

Application : *Soit le quadripôle ci-contre alimenté par une tension sinusoïdale* $u_e(t) = E\cos(\omega t)$.

Etudier le comportement en gain et en phase de ce filtre puis tracer son diagramme de Bode.



Correction :



V] Filtres à opérations particulières

1. Filtre moyenneur

Un filtre moyenneur permet d'obtenir la moyenne (composante continue) d'un signal en sortie.

Soit un signal périodique $s(t)$ quelconque de période T_1 en entrée, on peut le décomposer en somme de signaux sinusoïdaux grâce à l'analyse de Fourier :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n) \qquad \text{avec} \quad f_n = n f_1$$

Pour obtenir la moyenne de ce signal, il faut conserver uniquement l'harmonique de rang 0 :

$$< s(t) >_{T_1} = s_0 \cos(\varphi_0)$$

Ainsi, pour réaliser un filtre moyenneur, il faut utiliser **un filtre passe-bas de fréquence de coupure très petite devant la fréquence fondamentale du signal** ($\omega_c \ll \omega_1 = 2\pi f_1$).
Le critère « très petit » dépendra de l'ordre du filtre utilisé et de l'atténuation souhaitée.

2. Filtre intégrateur

Un filtre intégrateur donne en sortie l'intégrale temporelle du signal d'entrée multipliée par une constante **K** :

$$u_s(t) = K \int_0^t u_e(t)\, dt$$

$$\underline{u_s(t)} = K\int_0^t \underline{u_e(t)}\,dt$$

$$\underline{u_s(t)} = \frac{K}{j\omega} \times \underline{u_e(t)}$$

$$\boxed{\underline{H(\omega)} = \frac{\underline{u_s(t)}}{\underline{u_e(t)}} = \frac{K}{j\omega}}$$

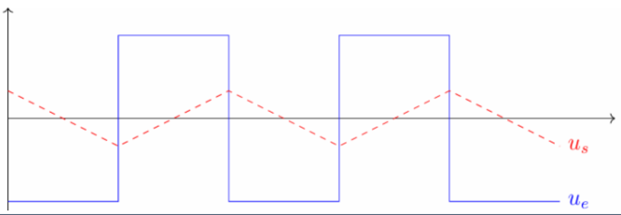
La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit :

$$\underline{H(\omega)} = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}} \xrightarrow[\omega \gg \omega_c]{} \frac{\omega_c H_0}{j\omega}$$

Ainsi, dans la limite ou la fréquence de coupure est faible devant la fréquence du signal d'entrée, un filtre passe bas d'ordre 1 se comporte comme un filtre intégrateur avec $K = \omega_c H_0$.

On parle de filtre **pseudo-intégrateur** car il est possible de réaliser un filtre **intégrateur pur** à partir d'un composant actif (*cf. 2ème année*).

<u>Exemple :</u> On alimente un filtre passe-bas de fréquence de coupure 10 Hz avec un signal créneau de fréquence 1 kHz. On observe en sortie un signal qui est l'intégrale du signal d'entrée.



3. <u>Filtre dérivateur</u>

Un filtre dérivateur donne en sortie la dérivée temporelle du signal d'entrée multipliée par une constante **K** :

$$u_s(t) = K\frac{d}{dt}u_e(t)$$

$$\underline{u_s(t)} = K\frac{d}{dt}\underline{u_e(t)}$$

$$\underline{u_s(t)} = Kj\omega \times \underline{u_e(t)}$$

$$\boxed{\underline{H(\omega)} = \frac{\underline{u_s(t)}}{\underline{u_e(t)}} = Kj\omega}$$

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit :

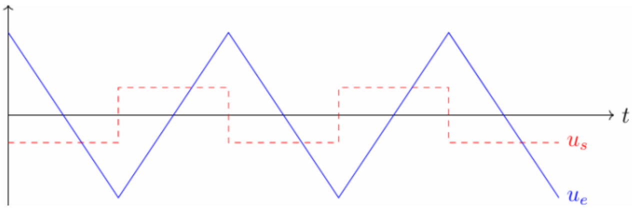
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0 j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}} \xrightarrow[\omega \ll \omega_c]{} \frac{H_0}{\omega_c} j\,\omega$$

Ainsi, dans la limite ou la fréquence de coupure est grande devant la fréquence du signal d'entrée, un filtre passe haut d'ordre 1 se comporte comme un filtre dérivateur avec $K = \frac{H_0}{\omega_c}$.

En pratique, Il n'est pas possible de réaliser un filtre **dérivateur pur** car son gain serait infini :

$$G(\omega) = \left|\underline{H}(\omega)\right| = H_0 \frac{\omega}{\omega_c} \propto \omega.$$

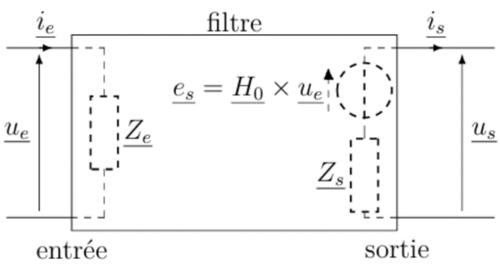
<u>Exemple :</u> On alimente un filtre passe-haut de fréquence de coupure 1 kHz avec un signal créneau de fréquence 10 Hz. On observe en sortie un signal qui est la dérivée du signal d'entrée.



VI] Mise en cascade de filtres

1. Impédance d'entrée et de sortie

L'action d'un filtre linéaire sur le reste du circuit peut être modélisée par le système ci-contre.



Vu depuis l'entrée, le filtre se comporte comme une impédance $\underline{Z_e}$, appelée **impédance d'entrée** du filtre :

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$$

En sortie, l'action du filtre sur ce qui se situe après est modélisée par un générateur réel, association d'une source idéale de tension $\underline{e_s} = \underline{H_0} \times \underline{u_e}$ et d'une **impédance de sortie** $\underline{Z_s}$.

Lorsque le filtre est à vide (rien n'est branché en sortie, donc **i_s = 0**), alors $\underline{u_s} = \underline{e_s} = \underline{H_0} \times \underline{u_e}$.

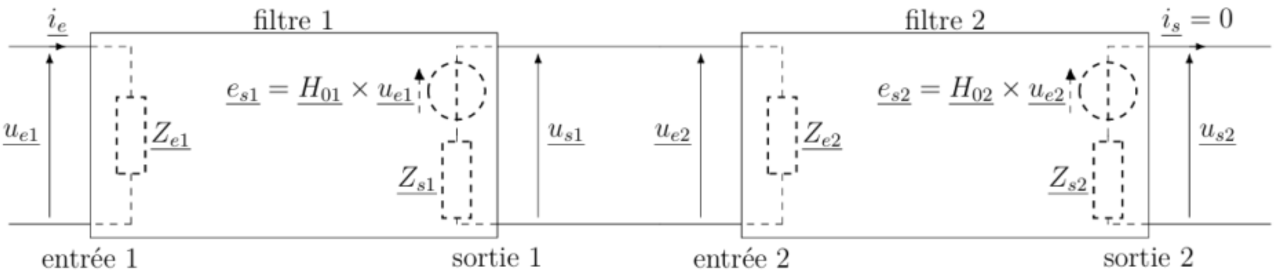
Lorsque le filtre est **chargé** (quelque chose est branchée en sortie, donc **$i_s \neq 0$**) : $\underline{u_s} = \underline{e_s} - \underline{Z_s}\,\underline{i_s}$.

$$\underline{u_s} \neq \underline{H_0} \times \underline{u_e}$$

La fonction de transfert du filtre chargé est modifiée par la charge, donc le fonctionnement fréquentiel du filtre est modifié par la charge.

2. Mise en cascade de deux filtres

La mise en cascade de deux filtres est modélisée de la façon suivante :



Avec $\underline{\boldsymbol{H_{0_1}}}$ et $\underline{\boldsymbol{H_{0_2}}}$ les fonctions de transfert à vide des deux filtres.

La fonction de transfert globale s'écrit :

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \frac{\underline{\boldsymbol{u_{s_2}}}}{\underline{\boldsymbol{u_{e_1}}}} = \frac{\underline{\boldsymbol{u_{s_2}}}}{\underline{\boldsymbol{u_{e_2}}}} \times \frac{\underline{\boldsymbol{u_{e_2}}}}{\underline{\boldsymbol{u_{e_1}}}} = \frac{\underline{\boldsymbol{u_{s_2}}}}{\underline{\boldsymbol{u_{e_2}}}} \times \frac{\underline{\boldsymbol{u_{s_1}}}}{\underline{\boldsymbol{u_{e_1}}}}$$

Cependant le filtre n°1 est chargé donc $\frac{\underline{\boldsymbol{u_{s_1}}}}{\underline{\boldsymbol{u_{e_1}}}} \neq \underline{\boldsymbol{H_{0_1}}}$.

A la place, on exprime $\underline{\boldsymbol{u_{s_1}}}$ grâce à un pont diviseur de tension :

$$\underline{\boldsymbol{u_{s_1}}} = \underline{\boldsymbol{u_{e_2}}} = \frac{\underline{\boldsymbol{Z_{e_2}}}}{\underline{\boldsymbol{Z_{s_1}}} + \underline{\boldsymbol{Z_{e_2}}}} \times \underline{\boldsymbol{e_{s_1}}} = \frac{\underline{\boldsymbol{Z_{e_2}}}}{\underline{\boldsymbol{Z_{s_1}}} + \underline{\boldsymbol{Z_{e_2}}}} \times \underline{\boldsymbol{H_{0_1}}} \times \underline{\boldsymbol{u_{e_1}}} \Leftrightarrow \frac{\underline{\boldsymbol{u_{s_1}}}}{\underline{\boldsymbol{u_{e_1}}}} = \underline{\boldsymbol{H_{0_1}}} \times \frac{\underline{\boldsymbol{Z_{e_2}}}}{\underline{\boldsymbol{Z_{s_1}}} + \underline{\boldsymbol{Z_{e_2}}}}$$

Ainsi, il vient :

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{H_{0_2}}} \times \underline{\boldsymbol{H_{0_1}}} \times \frac{\underline{\boldsymbol{Z_{e_2}}}}{\underline{\boldsymbol{Z_{s_1}}} + \underline{\boldsymbol{Z_{e_2}}}}$$

Dans la limite ou **l'impédance de sortie du premier filtre est faible devant l'impédance d'entrée du deuxième filtre** ($\underline{\boldsymbol{Z_{s_1}}} \ll \underline{\boldsymbol{Z_{e_2}}}$), on a :

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{H_{0_2}}} \times \underline{\boldsymbol{H_{0_1}}}$$

La fonction de de transfert à vide de l'association des deux filtres est égale au produit des fonctions de transfert des deux filtres à vide.

Ce propos est généralisable à tous les associations de quadripôles en électronique. On parle d'adaptation d'impédance.