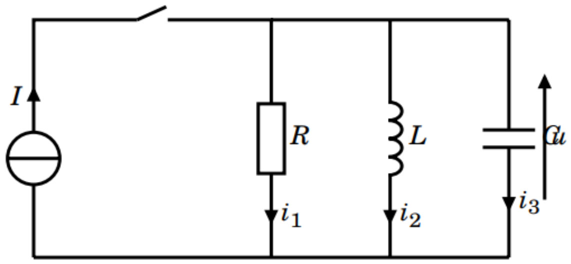
DM n°4 : Etude d'un émetteur radio (18 pts + 2 pts POL)



L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.

L'antenne est alimentée par une source idéale de courant.

On s'intéresse à la réponse en tension u(t).

Le première partie traite du régime libre de l'antenne et la deuxième du régime sinusoïdal forcé.

Partie 1 : Etude du régime libre (9 pts)

La source idéale de courant délivre un courant constant I, à t = 0, on ferme l'interrupteur.

Pour t < 0, aucun courant ne circule et le condensateur est déchargé.

1. Ecrire la loi des nœuds ainsi que les relations tension-courant de la résistance, du condensateur et de la bobine dans le circuit. **1 pt**

$$\begin{cases} I = i_1 + i_2 + i_3 \\ u = Ri_1 \\ u = L\dfrac{di_2}{dt} \\ i_3 = C\dfrac{du}{dt} \end{cases}$$

2. En dérivant par rapport au temps la loi des nœuds, obtenir l'équation différentielle du circuit sur **u(t)**. **1 pt**

$$\frac{dI}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$$

$$0 = \frac{1}{R}\frac{du}{dt} + \frac{u}{L} + \frac{d}{dt}\left(C\frac{du}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$

3. Identifier la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité **Q** de la forme canonique ci-dessous**.** Commenter l'expression du facteur de qualité. **1 pt**

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = f(t)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \Leftrightarrow Q = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

On constate que si R augmente, Q augmente également. Cela se comprend ainsi : si R augmente, à u donné la branche de i_1 tend vers le comportement d'un interrupteur ouvert ; le circuit restant se comporte alors de plus en plus comme un LC parfait.

4. Déterminer les valeurs de $i_1,\ i_2,\ i_3$ et u à **t = 0^+**. **1 pt**

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur :

$$u(t = 0^+) = 0$$

Par continuité de l'intensité à travers une bobine :

$$i_2(t = 0^+) = 0$$

On en déduit par la loi d'Ohm aux bornes de la résistance :

$$u(t = 0^+) = Ri_1(t = 0^+) = 0 \Leftrightarrow i_1(t = 0^+) = 0$$

La loi des nœuds conduit alors à :

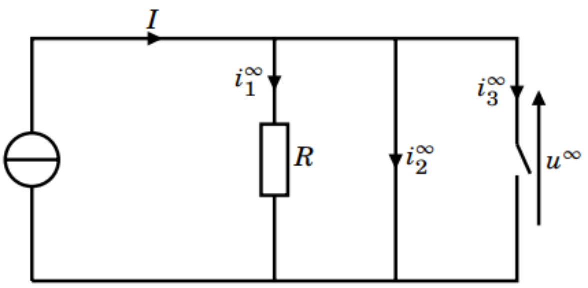
$$i_3(t = 0^+) = I$$

5. En déduire les conditions initiales sur $u(t = 0^+)$ et $\frac{du}{dt}(t = 0^+)$. **1 pt**

$$u(t = 0^+) = 0$$

$$C\frac{du}{dt}(t = 0^+) = i_3(t = 0^+) \Leftrightarrow \frac{du}{dt}(t = 0^+) = \frac{i_3}{C}$$

6. Dessiner le schéma électrique équivalent du circuit en régime permanent (*en régime libre, le régime permanent est stationnaire).* En déduire, les valeurs de $i_1,\ i_2,\ i_3$ et u lorsque $t \to \infty$. **1 pt**



$$\boxed{u^\infty = 0 \quad , \quad Ri_1^\infty = 0 \quad , \quad i_3^\infty = 0 \quad , \quad i_2^\infty = I}$$

7. Déterminer la condition sur R, L et C sous laquelle le régime transitoire est pseudo-périodique. **1 pt**

On peut utiliser le résultat de cours : le régime sera pseudopériodique si :

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

8. Pour ce régime, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (sur **u(t)**) du circuit, on fera apparaître deux constantes d'intégrations A et B. **1 pt**

$$u(t) = e^{-\omega_0 t/2Q}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

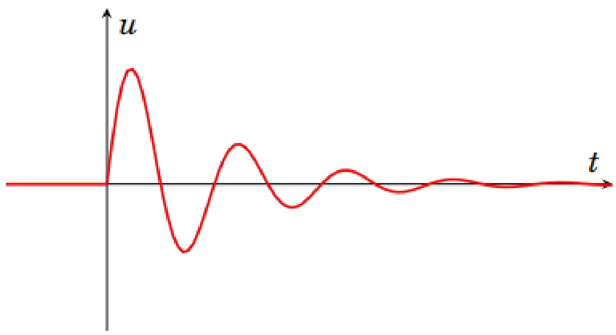
9. Appliquer les conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégrations. Ecrire l'expression de **u(t)** et tracer son allure. **1 pt**

On applique les conditions initiales déterminées précédemment :

$$\begin{cases} u(t=0^+) = 0 \\ \frac{du}{dt}(t=0^+) = \frac{1}{C}i_3(t=0^+) = \frac{I}{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ -\frac{\omega_0}{2Q}A + \omega B = \frac{I}{C} \end{cases} \Rightarrow B = \frac{I}{C\omega}$$

d'où

$$\boxed{u(t) = \frac{I}{C\omega}e^{-\omega_0 t/2Q}\sin(\omega t)}$$



Partie 2 : Etude du régime forcé (9 pts)

La source idéale de courant délivre un courant **i(t) = Icos(ωt)**, on s'intéresse au régime forcé, c'est-à-dire la réponse du circuit (toujours **u(t)**) une fois le régime transitoire terminé.

1. Rappeler les impédances complexes de la résistance $\underline{Z_R}$, du condensateur $\underline{Z_C}$ et de la bobine $\underline{Z_L}$. **1 pt**

$$\underline{Z_R} = R$$
$$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$$
$$\underline{Z_L} = jL\omega$$

2. Déterminer l'impédance complexe de l'association équivalente à l'antenne $\underline{Z_{eq}}$. **1 pt**

On regroupe la résistance, la bobine et le condensateur, qui sont tous les trois en parallèles, en une impédance équivalente $\underline{Z}$ donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + jC\omega = \frac{j\omega L + R + (jC\omega)R(jL\omega)}{jRL\omega}$$

D'où :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{jRL\omega}{jL\omega + R - RLC\omega^2}}$$

3. En déduire l'amplitude complexe de la tension $\underline{U}$ en fonction de ω , I et de **R**, **L** et **C**. **1 pt**

(La représentation complexe de la tension s'écrit $\underline{u(t)} = Ue^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{U}e^{j\omega t}$, avec $\underline{U}=Ue^{j\varphi}$)

On a $\dfrac{\underline{U_0}}{\underline{I_0}} = \underline{Z}$, donc $\underline{U_0} = \underline{Z}.\underline{I_0} = \underline{Z}.I_0$ (car $\underline{I_0} = I_0$, il n'y a pas de phase à l'origine), donc :

$$\underline{U_0} = \frac{I_0 jRL\omega}{jL\omega + R - RLC\omega^2}$$

Pour la suite, il est plus futé de tout diviser par $jL\omega$ afin de retrouver une fonction du type de celle pour le RLC série :

$$\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + \dfrac{R}{jL\omega} + jRC\omega}$$

$$\boxed{\underline{U_0} = \frac{R.I_0}{1 + jR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}}$$

4. Calculer l'amplitude U de la tension réelle $u(t) = Ucos(\omega t + \varphi)$. En déduire l'expression de la pulsation ω_0 qui maximise U (*on parle de résonance*) en fonction de **L** et **C**. **1 pt**

On a $U = |\underline{U_0}| = \dfrac{RI_0}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2}}$.

Il faut chercher le maximum. Il est atteint lorsque le dénominateur est minimum (car pas de ω au numérateur).

C'est ici assez simple : c'est lorsque $\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2 = 0$, donc pour $\boxed{\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

C'est donc cette pulsation là qu'il faut utiliser.

5. Les signaux radio FM sont transmis grâce à une technique appelée modulation de fréquence. Elle utilise une onde porteuse de fréquence f_0. Le signal à transmettre est contenu dans les variations de fréquence autour de f_0. Déterminer l'expression de la fréquence f_0 de la porteuse que doit utiliser l'émetteur radio. **1 pt**

La fréquence de la porteuse doit maximiser l'amplitude de la tension pour maximiser la portée de l'émetteur radio :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

6. Montrer que l'on peut exprimer l'amplitude complexe de la tension $\underline{U}$ en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite et de $Q = R\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité selon l'expression : **1 pt**

$$\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + jQ^2(x + \frac{1}{x})^2}$$

On définit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $x = \omega/\omega_0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
C\omega - \frac{1}{L\omega} &= \frac{C\sqrt{L\omega}}{\sqrt{L}} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}L\omega} \\
&= \frac{\sqrt{C}\sqrt{C}\sqrt{L\omega}}{\sqrt{L}} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}\sqrt{L}\sqrt{L\omega}} \\
&= \frac{\sqrt{C\omega}}{\sqrt{L\omega_0}} - \frac{\sqrt{C\omega_0}}{\sqrt{L\omega}} \\
&= \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}\left(x - \frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + jR\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

On pose $Q = R\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}$. On a :

7. En déduire l'expression de l'amplitude réelle de la tension **U** en fonction de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{Q}$. Représenter l'allure du graphe de $\boldsymbol{U}$ en fonction de $\boldsymbol{x}$. **1 pt**

$$U = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Graphe Cf. cours.

8. Calculer le déphasage φ entre la tension **u(t)** et l'intensité **i(t).** Représenter l'allure du graphe de φ en fonction de $\boldsymbol{x}$. **1 pt**

Le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$ est donné par l'argument de $\underline{U_0}$.
En effet, $\phi_u - \phi_i = \phi_u$ car $\phi_i = 0$, et $\phi_u = \arg(\underline{U_0})$.

$$\boxed{\phi = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)}$$