DM n°5 : Oscillateur mécanique et filtrage

Données :

— Champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81$ m.s^{-2}

— L'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 s'écrit

$$\mathcal{E}_{p,e} = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2$$

où x désigne l'allongement du ressort.

— **Notation complexe** : pour une fonction $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$, on notera :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t+\phi)} = X_m e^{j\phi} e^{j\omega t} = \underline{X} e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{X} \text{ l'amplitude complexe de } x(t).$$

On a donc : $X_m = |\underline{X}|$ et $\phi = \arg(\underline{X})$.

Étude de la suspension d'un véhicule – d'après CCP 2013 TSI

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :

— à améliorer le confort des occupants ;

— à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;

— à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu, les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement. Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat... Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g}$.

Hypothèses : tout au long du problème, on considèrera que :

— l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule ;

— l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve à tout instant en contact avec le sol ;

— les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

I. Suspension sans amortissement

Le véhicule à vide (masse suspendue) est assimilé à une masse $m = 1,0.10^3$ kg. La suspension est constituée d'un ressort de masse négligeable de raideur $k = 1,0.10^5$ N/m et de longueur au repos ℓ_0. Dans cette première partie on néglige tout amortissement. On ne s'intéresse qu'au mouvement de translation verticale du véhicule. La position du véhicule est repérée par sa coordonnée $z(t)$, l'axe Oz étant vertical ascendant muni d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$ (figure 1 ci-dessous).

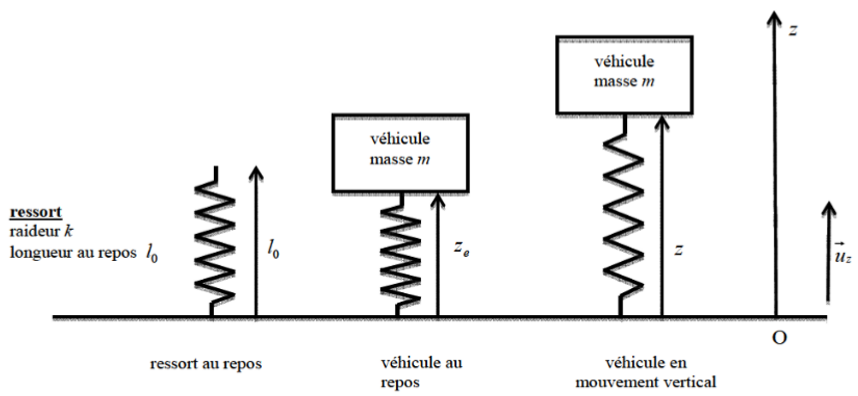


FIGURE 1 – Suspension sans amortissement

$z(t)$ représente la coordonnée de l'extrémité supérieure du ressort. Á l'équilibre, en l'absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule est repérée par sa coordonnée z_e.

1. Faire le bilan des forces auxquelles le véhicule est soumis lorsqu'il est hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme.

2. Exprimer la position d'équilibre de la masse z_e en fonction de k, m, g et ℓ_0.

3. Établir l'équation différentielle sur la cote $z(t)$ et montrer qu'elle s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = \beta$$

où l'on exprimera ω_0 et β en fonction de z_e, k, et m.

4. Donner la solution générale de l'équation différentielle du mouvement en prenant comme paramètre d'étude ω_0 et z_e. Calculer la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0.

5. On suppose qu'un opérateur appuie sur le véhicule et l'amène dans une position repérée par la cote z_0 où $z_0 < z_e$. Á un instant $t = 0$, choisi comme origine du temps, le véhicule est lâché sans vitesse initiale. Déterminer $z(t)$ en fonction de t, z_e, ω_0 et z_0.

6. Exprimer $z(T_0/4)$, $z(T_0/2)$, $z(3T_0/4)$ et $z(T_0)$. Tracer l'allure de $z(t)$, faire apparaître sur le graphe les cotes minimales z_{min}, maximale z_{max} et moyenne z_{moy} ainsi que la période propre T_0. Donner les expressions des cotes minimale, maximale et moyenne en fonction de z_e et z_0.

7. Établir l'expression temporelle de l'énergie cinétique. Exprimer $\mathcal{E}_c(T_0/2)$. Comparer $\mathcal{E}_p(T_0/2)$ et $\mathcal{E}_p(0)$. Commenter.

II. Suspension avec amortissement

On suppose que la suspension décrite dans la partie précédente comporte maintenant un dispositif qui exerce, sur le véhicule de masse m, une force d'amortissement visqueux donnée par $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ représente la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et h un coefficient appelé coefficient de frottement fluide (figure 2).

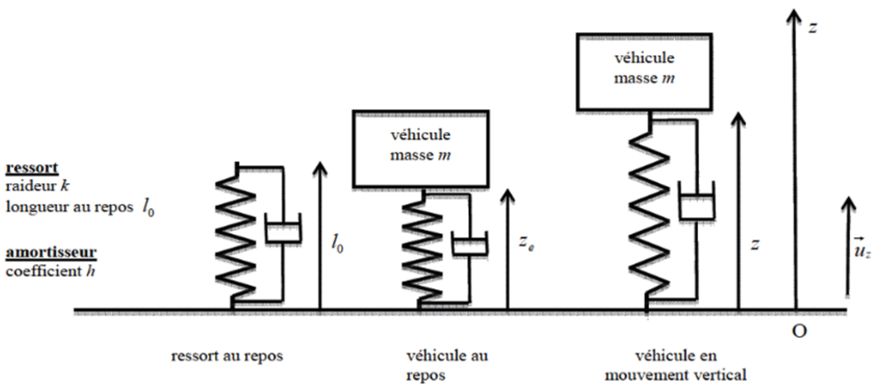


Figure 2 – Suspension avec amortissement

8. Quel est l'unité de h dans le système international ?

9. Faire le bilan des forces appliquées au véhicule hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme. Écrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est l'équilibre.

10. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. Dans cette équation apparaîtront les différentes grandeurs z_e, k, m et h.

11. Écrire les conditions portant sur les paramètres m, k et h pour que la suspension se trouve respectivement dans les régimes pseudo-périodique, critique et apériodique.

12. **a.** Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, dans quel régime se trouve-t-il lorsque le véhicule est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

b. Dès lors, comment choisir la valeur de l'amortissement pour que le véhicule ne soit pas en régime pseudo-périodique même lorsqu'il est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

Le véhicule se déplace maintenant sur un sol non plat. La position du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (figure 3). Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.

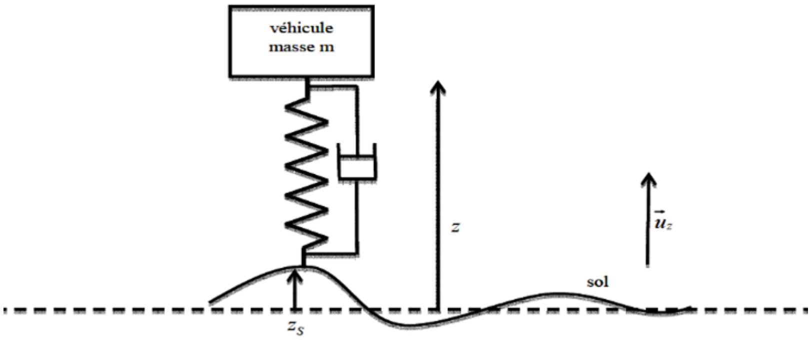


FIGURE 3 – Véhicule sur un sol non plat de profil quelconque

13. Dans cette question, le véhicule se déplace sur une route telle que :

— $t < t_1$: $z_s(t) = z_1$ où z_1 est une constante positive et $t_1 > 0$.

— $t > t_1$: $z_s(t) = 0$.

Pour illustrer la situation, on pourra imaginer qu'à l'instant t_1 le véhicule descend d'un trottoir de hauteur z_1 et rejoint une route plane et horizontale de cote nulle.

On considère que pour $t < t_1$, la cote $z(t)$ du véhicule est constante c'est-à-dire que le véhicule se déplace en régime permanent.

a. Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t >> t_1$, lorsque la suspension est en régime pseudo-périodique.

b. Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t >> t_1$ lorsque la suspension est en régime apériodique.

On précisera clairement sur chaque graphique la valeur de z pour $0 < t < t_1$ et la valeur de z pour t tendant vers l'infini.

III. Régime forcé

Dans cette partie, le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse constante v_1. Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol. Ici encore, la position du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (figure 4). dans cette partie, le véhicule se déplace sur un sol ondulé horizontal sinusoïdal. On a ainsi : $z_s(t) = z_{s,0}\cos(\omega t)$.

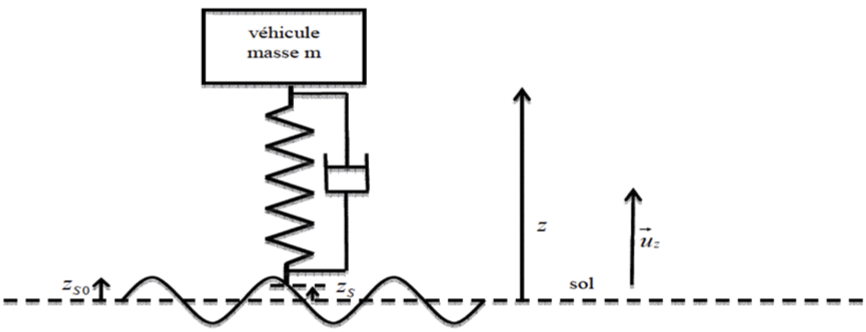


FIGURE 4 – Régime forcé

La suspension comporte un système d'amortissement visqueux ; son action sur le véhicule est modélisée par la force $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur et h le coefficient de frottement fluide. On a donc $\overrightarrow{f} = -h\left(\dfrac{dz}{dt} - \dfrac{dz_s}{dt}\right)\overrightarrow{u_z}$.

14. Déterminer l'expression de la force exercée par le ressort de la suspension sur la masse m en fonction de k, z, z_s, ℓ_0 et du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$.

15. En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et $z_s(t)$ et leur dérivées temporelles ainsi que les paramètres h, m, k et z_e (où z_e représente la longueur du ressort à l'équilibre statique calculée à la question 2).

Voulant étudier les oscillations de la masse m autour de sa position d'équilibre z_e, on posera $z' = z - z_e$.

16. Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme :

$$m\frac{d^2z'}{dt^2} + h\frac{dz'}{dt} + kz' = Y(t)$$

Déterminer l'expression de $Y(t)$ en fonction de z_s, $\dfrac{dz_s}{dt}$, k et h.

Dans la suite de cette partie, on utilisera les notations complexes rappelées au début de l'énoncé.

17. Pour simplifier les notations, on posera : $\omega_0^2 = k/m$ et $2\lambda = h/m$. Déterminer l'expression de la réponse complexe $\underline{Z'}$ en fonction de la suspension en fonction de $\underline{Z_s}$, ω, ω_0 et λ . Montrer que le module de la réponse complexe est donné par l'expression :

$$H = \left|\frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}}\right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

Par la suite, les candidats pourront utiliser l'expression précédente du module de la réponse complexe, même s'ils ne sont pas parvenus à la démontrer.

18. Étude de la réponse complexe

- **a.** Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers 0. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.
- **b.** Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers l'infini. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.
- **c.** On considère pour simplifier :
  - — que la valeur maximale de H est atteinte pour une pulsation ω_r non nulle telle que le dénominateur de l'expression précédente est minimal ;
  - — que l'on se trouve dans le cas où $\omega_0^2 > 4\lambda^2$.

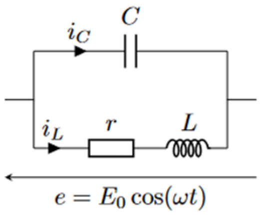
  Déterminer l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et λ. À quoi correspond physiquement le cas où la pulsation est égale à ω_r ?

Remarque : en réalité, la détermination de la pulsation qui correspond à la valeur maximale de H aurait dû prendre en compte le fait que le numérateur de H dépend également de la pulsation. Le calcul complet conduit à des résultats sensiblement équivalents.

19. Donner l'allure de la courbe représentant H en fonction de ω. On fera apparaître les valeurs particulières déterminées dans la question précédente.

Circuit bouchon

Considérons un dipôle constitué d'une bobine (inductance L et résistance interne r) montée en dérivation avec un condensateur (capacité C). Il est alimenté par la tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω variable.



1. Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_s}$ d'un dipôle où r, L et C seraient montés en série, d'abord en fonction des composants puis de la résistance r, de la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et du facteur de qualité $Q = L\omega_0/r$.

2. Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle parallèle sous la forme :

$$\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\underline{Z_s}}\left(1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0}\right)$$

3. Montrer que lorsque le facteur de qualité est très élevé ($Q >> 1$) et la pulsation ω pas trop faible ($\omega >> \omega_0/Q$), l'impédance $\underline{Z}$ peut se mettre sous forme approchée :

$$\underline{Z} \approx \frac{Q^2 r^2}{\underline{Z_s}}$$

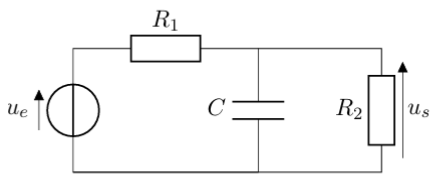
On se place dans ces hypothèses pour toute la suite de l'exercice.

4. Montrer que $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque $\omega = \omega_0$. Quel est alors le comportement du circuit ? Justifier sa dénomination de circuit bouchon.

5. On se place à $\omega = \omega_0$. Déterminer en fonction de E_0, Q et r les intensités réelles $i_C(t)$ et $i_L(t)$ qui traversent respectivement le condensateur et la bobine. Commenter les résultats obtenus.

Étude d'un filtre

Le circuit ci-contre est composé de 2 résistances R_1 et R_2 et d'un condensateur de capacité C. Il est alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = E\cos(\omega t)$.



1. Déterminer sans calcul la nature du filtre.

2. Montrer que la fonction de transfert du filtre peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{A + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

Exprimer A et ω_0 en fonction de R_1, R_2, et C.

On utilisera les notations suivantes pour la suite du problème : $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega))$.

3. On souhaite dans cette question, tracer le diagramme de Bode du filtre en utilisant comme variable la fréquence f.

a. Exprimer la fonction de transfert en fonction de f, $f_0 = \omega_0/2\pi$ et A.

b. Exprimer le gain en décibels $G_{\mathrm{dB}}(f)$ et la phase $\varphi(f)$ du filtre.

c. Établir l'équation des asymptotes (à hautes et basses fréquences) pour la phase et le gain en décibels, puis tracer le diagramme de Bode asymptotique pour $A = 10$ et $f_0 = 200$ Hz sur le papier semi-log fourni, à rendre avec la copie.

d. Compléter le tracé avec le diagramme de Bode réel.

4. On suppose que $u_e(t) = 10\cos(1000\omega_0 t + \pi/2)$, déterminer l'expression de la tension de sortie $u_s(t)$ en fonction de ω_0 pour $A = 10$. Commenter la particularité du signal obtenu.

5. On suppose $u_e(t)$ une tension créneau de pulsation $1000\omega_0$. Décrire sans calcul l'allure de $u_s(t)$.

6. Déduire de la fonction de transfert établie à la question 2, l'équation différentielle vérifiée par $u_s(t)$ et $u_e(t)$ sous sa forme canonique en fonction de A et ω_0.