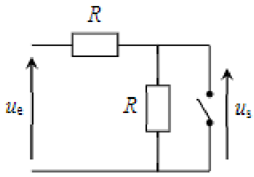
Exercices : Filtrage linéaire

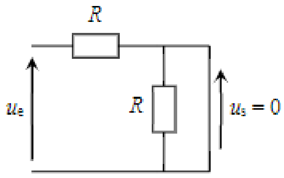
1) Filtre RC aux bornes d'un condensateur réel

1. En basse fréquence ($\omega \to 0$) le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où :



Pont diviseur de tension : $u_s = \dfrac{R_0}{R+R_0} u_e$.

En haute fréquence ($\omega \to \infty$) le condensateur se comporte comme un fil, d'où :



La tension u_s est la tension aux bornes d'un fil, elle est donc nulle.

Le signal de sortie est négligeable pour les hautes fréquences, important pour les basses fréquences : il s'agit d'un filtre passe-bas.

➪ *Méthode 7.1*

2. On considère l'association parallèle RC comme un dipôle d'impédance $\underline{Z}_{\text{éq}}$ (dont l'admittance $\underline{Y}_{\text{éq}}$ est obtenue immédiatement). Diviseur de tension : $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R+\underline{Z}_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{R\underline{Y}_{\text{éq}}+1}$,

avec $\underline{Y}_{\text{éq}} = jC\omega + \dfrac{1}{R}$, soit $\underline{H} = \dfrac{1}{jRC\omega + 2}$. En posant $x = RC\omega$ on obtient $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1}{2+jx}}$.

On peut mettre la fonction de transfert sous forme canonique avec une partie réelle unitaire pour le dénominateur soit $\underline{H} = \dfrac{1/2}{1+jx/2}$.

➪ *Méthodes 7.2, 7.3*

3. Le gain de la fonction de transfert s'écrit $G = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, il est alors évident que $G_{\max} = \dfrac{1}{2}$, qui correspond à la valeur $|H_0|$ si on avait fait une identification avec la forme canonique.

Par définition, $G(x_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x_c^2/4}}$, donc $4 + x_c^2 = 8$ soit $x_c = 2$. On obtient la pulsation de coupure $\boxed{\omega_c = \dfrac{2}{RC}}$.

De façon inhabituelle, cet énoncé définit une pulsation réduite x qui n'est pas égale à ω/ω_c*, on trouve donc une valeur de* x_c *différente de 1.*

4. – Pour $x \ll 1$, la fonction de transfert devient $\underline{H}(x) \approx \dfrac{1}{2}$.

Alors $G_{\text{dB}} = 20\log(1/2) = -6\ \text{dB}$, d'où une asymptote horizontale à – 6 dB en basse fréquence sur la courbe de gain. Et $\varphi = \arg(1/2) = 0$, d'où l'asymptote pour la phase en BF.

– Pour $x \gg 1$, $\underline{H}(x) \approx \dfrac{1}{jx} = -\dfrac{j}{x}$.

Alors $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = -20\log x$: le facteur -20 devant $\log x$ indique une pente de l'asymptote de –20 dB/décade. Et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ qui représente l'asymptote de la phase en HF.

On détermine la fréquence de coupure par intersection des asymptotes : on lit $f_c = 300\ \text{Hz}$. Or $\omega_c = 2\pi f_c = \dfrac{2}{RC}$ donc $RC = \dfrac{1}{\pi f_c}$. AN $\boxed{RC = 1\ \text{ms}}$.

On peut aussi déterminer la fréquence de coupure en cherchant la fréquence pour laquelle le gain est inférieur de 3 décibels à sa valeur maximale (abscisse –9 environ), ou encore celle où la phase vaut –45°.

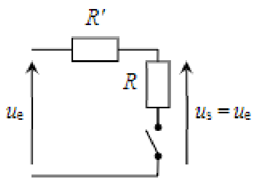
➪ *Méthode 7.5*

5. À haute fréquence, $\underline{H}(x) \approx \dfrac{1}{jx}$. On reconnaît l'opérateur intégration, caractérisé sur un diagramme de Bode par une pente de –20 dB/décade (division par ω) et un déphasage qui tend vers –90° (division par j).

6. Pour 900 Hz, on lit $G_{\text{dB}} = -16\ \text{dB} = 20\log G$. On en déduit $G = 10^{-16/20} = 0{,}16 = \dfrac{U_{sm}}{U_{em}}$. Donc $U_{sm} = G \cdot U_{em} = 0{,}16 \cdot 10$ soit $\boxed{U_{sm} = 1{,}6\ \text{V}}$.

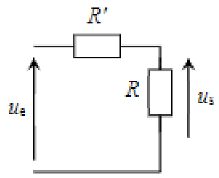
2) Filtre à retard de phase

1. En basse fréquence ($\omega \to 0$) le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où :



En effet $u_e - R'i - u_s = 0$ avec $i = 0$ (interrupteur ouvert) donc $u_s = u_e$.

En haute fréquence ($\omega \to \infty$) le condensateur se comporte comme un fil, d'où :



D'après la formule du pont diviseur on obtient $u_s = \dfrac{R}{R+R'} u_e$.

Ce filtre laisse passer les hautes et basses fréquences, mais avec des coefficients différents : <u>on ne peut pas vraiment conclure</u> à partir de cette étude préliminaire.

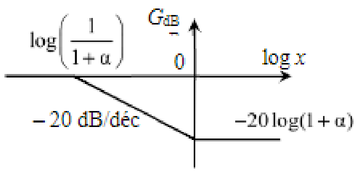
⇨ *Méthode 7.1*

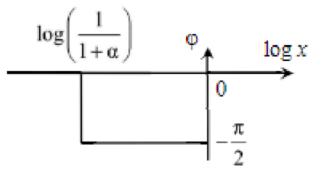
2. On utilise la formule du diviseur de tension, soit $\underline{H} = \dfrac{R + \dfrac{1}{jC\omega}}{R' + R + \dfrac{1}{jC\omega}}$. On multiplie alors numérateur et dénominateur par $jC\omega$ pour avoir des parties réelles unitaires et des puissances croissantes de ω : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1 + jRC\omega}{1 + j(R+R')C\omega} = \dfrac{1 + jx}{1 + j(1+\alpha)x}}$.

⇨ *Méthode 7.2*

3. Pour $x \ll \dfrac{1}{1+\alpha}$: $\underline{H}(x) \approx 1$ soit $G_{dB} = 0$, $\varphi = 0$. Pour $\dfrac{1}{1+\alpha} \ll x \ll 1$ (si ce domaine existe) : $\underline{H}(x) \approx \dfrac{1}{j(1+\alpha)x}$ soit $G_{dB} = -20\log(1+\alpha) - 20\log x$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $x \gg 1$: $\underline{H}(x) \approx \dfrac{1}{1+\alpha}$ soit $G_{dB} = -20\log(1+\alpha)$, $\varphi = 0$.





4. D'après le diagramme asymptotique de la phase, on voit immédiatement que l'argument de la fonction de transfert est toujours négatif, soit $\varphi = \arg(\underline{u_s}) - \arg(\underline{u_e}) < 0$: <u>la sortie est en retard sur l'entrée, d'où le nom filtre à retard de phase.</u>

5. On cherche le déphasage minimal, donc le minimum de la fonction $\arg(\underline{H})$ qui doit correspondre à son seul extremum d'après le diagramme asymptotique de la phase.

$\varphi = \arctan x - \arctan((1+\alpha)x)$ donc l'extremum correspond à $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1+\alpha}{1+((1+\alpha)x)^2} = 0$,

soit $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1+\alpha}{1+((1+\alpha)x)^2} \Leftrightarrow 1-(1+\alpha) = (1-(1+\alpha))(1+\alpha)x^2 \Leftrightarrow \alpha = \alpha(1+\alpha)x^2$.

Les solutions sont $\boxed{x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \text{ pour } \alpha \neq 0}$ ou $\boxed{\text{toutes les valeurs de } x \text{ si } \alpha = 0}$, mais dans ces conditions, la fonction de transfert est toujours unitaire, et le filtre ne sert absolument à rien !

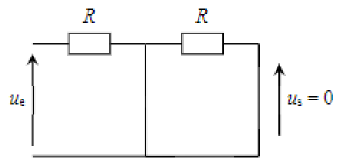
– Pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$ avec $\alpha \neq 0$, la phase minimale vaut $\varphi = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}} - \arctan\sqrt{1+\alpha}$ soit $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2} - 2\arctan\sqrt{1+\alpha}}$ et le gain vaut alors $G_0 = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{1+\alpha}}}{\sqrt{1+\left((1+\alpha)\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\right)^2}}$ soit $\boxed{G_0 = \sqrt{\dfrac{1}{1+\alpha}}}$.

– Si $\alpha = 0$, le gain vaut $G_0 = 1$, quel que soit x car il n'y a plus de résistance R'.

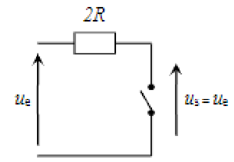
3) Filtre ADSL

1. On isole les signaux téléphoniques (basses fréquences) avec un filtre passe-bas, et les signaux informatiques avec un filtre passe-haut.
La fréquence de coupure doit être nettement plus grande que les fréquences téléphoniques et nettement plus faible que les fréquences informatiques : le meilleur choix est $\boxed{f_0 = 10\ \text{kHz}}$.

2. En basse fréquence ($\omega \to 0$), les bobines se comportent comme des fils, d'où :



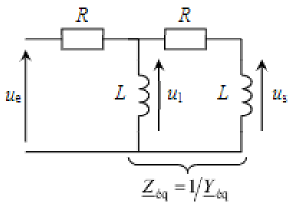
En haute fréquence ($\omega \to \infty$), les bobines se comportent comme des coupe-circuits, d'où :



Le signal de sortie est de l'ordre de grandeur du signal d'entrée pour les hautes fréquences, et négligeable pour les basses fréquences : c'est un filtre passe-haut. Il permettra d'obtenir les signaux informatiques.

⇨ *Méthode 7.1*

3. On considère deux ponts diviseurs successifs.
Soit $\underline{Y}_{\text{éq}} = \dfrac{1}{jL\omega} + \dfrac{1}{R + jL\omega}$ l'admittance de l'ensemble L en parallèle avec RL (ayant la tension u_1 à ses bornes).
Un premier pont diviseur donne :
$\underline{U}_1 = \dfrac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + R} = \dfrac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{éq}}}\underline{U}_e$.



La résistance et l'inductance de gauche ne sont pas en série, et ne constituent pas à elles seules un diviseur de tension. En revanche la résistance et l'inductance de droite, elles, sont bien en série.

Un second diviseur de tension donne : $\underline{U}_s = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}\underline{U}_1$, soit $\underline{U}_s = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega} \cdot \dfrac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{éq}}}\underline{U}_e$.

On obtient en développant : $\underline{U}_s = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega + R\left(\dfrac{R + jL\omega}{jL\omega} + 1\right)}\underline{U}_e = \dfrac{-(L\omega)^2}{R^2 + j3RL\omega - (L\omega)^2}\underline{U}_e$.

On divise par R^2 pour avoir une partie réelle unitaire et des puissances croissantes de ω au dénominateur : $\underline{H} = \dfrac{-\left(\dfrac{L}{R}\omega\right)^2}{1 + j3\dfrac{L}{R}\omega - \left(\dfrac{L}{R}\omega\right)^2}$. En posant $\boxed{\omega_0 = \dfrac{R}{L}}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$: $\boxed{\underline{H}(x) = \dfrac{-x^2}{1 + 3jx - x^2}}$.

⇨ *Méthodes 7.2, 7.3*

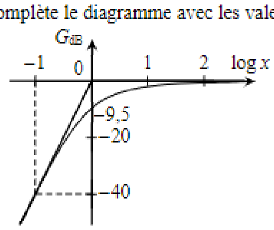
4. Pour $x \gg 1$, la fonction de transfert devient $\underline{H}(x) \approx 1$ donc $\boxed{G_{\text{dB}} = 0}$ et $\boxed{\varphi = 0}$ (réel positif).
Pour $x = 1$, $\underline{H}(1) = \dfrac{-1}{1 + 3j - 1} = \dfrac{j}{3}$, donc $\boxed{G_{\text{dB}} = 20\log\left(\dfrac{1}{3}\right) = -9{,}5\ \text{dB}}$ et $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2}}$ (imaginaire pur positif).
Pour $x \ll 1$, $\underline{H} \approx -x^2$, donc $\boxed{G_{\text{dB}} = 40\log x}$ (pente de $+40$ dB/décade) et $\boxed{\varphi = \arg(-x^2) = \pi}$: on choisit π car le saut de phase ne peut être que de $\dfrac{\pi}{2}$ avec la valeur pour $x = 1$.

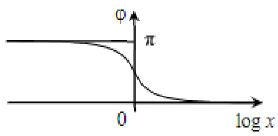
Pour un nombre réel négatif comme $-x^2$, on pourrait choisir aussi un argument de $-\pi$ au lieu de $+\pi$, les deux sont équivalents. Mais ici ce sont les autres valeurs qui nous imposent ce choix.

Autre rédaction : pour tout x, $G_{\text{dB}} = 20\log\dfrac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 9x^2}} = 40\log x - 10\log\left[(1 - x^2)^2 + 9x^2\right]$ et

$\varphi = \arg\dfrac{-x^2}{1 + 3jx - x^2} = \arg\dfrac{jx}{3 + j\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$, d'où on peut déduire les limites et valeurs précédentes $\left(\text{avec } \arctan(0) = 0,\ \arctan(+\infty) = +\dfrac{\pi}{2} \text{ et } \arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

On note que les asymptotes de gain se coupent pour $\log x = 0$.
On complète le diagramme avec les valeurs calculées précédemment en $x = 1$.





Le diagramme de Bode réel n'a pas de pic de résonance car le facteur de qualité du filtre vaut $Q = \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (voir exercice 9.9) ; de plus en $x = 1$ la courbe est nettement en dessous de la valeur maximale, il est donc impossible d'avoir un pic dans ces conditions.

5. La fréquence de coupure est $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{R}{2\pi L}$ donc $\boxed{L = \dfrac{R}{2\pi f_0}}$. AN $\boxed{L = 1{,}6\ \text{mH}}$ (ordre de grandeur des inductances effectivement utilisées dans les filtres ADSL).

4) Cave à vin

1 – La température est la somme d'une moyenne, d'une variation annuelle de fréquence $\nu_a = 3{,}2 \cdot 10^{-8}$ Hz et d'une variation journalière $\nu_j = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Hz :

$$T_{rmext}(t) = T_{\text{moy}} + T_a \cos(\omega_a t) + T_j \cos(\omega_j t + \varphi)$$

En utilisant le site de Météo France pour la station de Marignane, on obtient environ $T_{\text{moy}} = 15\,°\text{C} = 298\,\text{K}$, $T_a = 18\,\text{K}$ et $T_j = 10\,\text{K}$.

2 – On calcule le gain en décibels

$$G_{\text{dB}} = 20 \log \mathrm{e}^{-\frac{h}{\sqrt{2D}}\omega} = -\frac{20}{\ln 10} \frac{h}{\sqrt{2D}} \omega$$

On voit que le gain est une fonction linéaire de la fréquence, ce qui est inhabituel. Il s'agit d'un passe-bas.

3 – Le gain maximal est 1 pour la composante statique. On utilise la définition de la fréquence de coupure :

$$\mathrm{e}^{-\frac{h}{\sqrt{2D}}\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu_c = \frac{\ln 2}{2\sqrt{2}\pi} \frac{D}{h}} = \underline{2 \cdot 10^{-8}\,\text{Hz}}$$

On constate que $\nu_j \gg \nu_c$, donc les fluctuations de températures journalières sont parfaitement coupées ; de même, $\nu_a \simeq \nu_c$ donc les fluctuations saisonnière seront également atténuées et finalement $T_{\text{int}} \simeq T_{\text{moy}}$: la cave à vins joue bien son rôle pour avoir une température stable.

5) Couplage AC et DC d'une entrée d'oscilloscope

1 – On écrit un pont diviseur entre C_D et l'association parallèle de C_0 et R_0 :

$$\underline{H} = \frac{\frac{R_0/\mathrm{j}C_0\omega}{R_0+1/\mathrm{j}C_0\omega}}{\frac{R_0/\mathrm{j}C_0\omega}{R_0+1/\mathrm{j}C_0\omega} + 1/\mathrm{j}C_D\omega} = \frac{\frac{R_0}{1+\mathrm{j}R_0C_0\omega}}{\frac{R_0}{1+\mathrm{j}R_0C_0\omega} + 1/\mathrm{j}C_D\omega} = \frac{\mathrm{j}R_0C_D\omega}{\mathrm{j}R_0C_D\omega + (1 + \mathrm{j}R_0C_0\omega)}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}R_0C_D\omega}{1+\mathrm{j}R_0(C_0+C_D)\,\omega}}$$

Il s'agit d'un passe-haut. On remarque (en passant) que la limite à haute fréquence est $\frac{C_D}{C_D+C_0}$, ce qui est bien la formule du pont diviseur, sachant qu'à haute fréquence la branche contenant C_0 est associée à un fil, donc celle contenant R_0 n'est pas parcourue. Dans l'approximation proposée, on obtient

$$\boxed{\underline{H} \simeq \frac{\mathrm{j}R_0C_D\omega}{1+\mathrm{j}R_0C_D\omega}}$$

Le filtre a donc pour but d'enlever les fréquences basses. La fréquence de coupure est donc $\frac{2\pi}{R_0C_D}$; si celle-ci est de l'ordre de 1 Hz, le filtre ne coupera que la fréquence nulle, donc le continu : il s'agit bien d'**enlever la moyenne du signal**.

2 – On peut simplement mettre en entrée 1 de l'oscilloscope un signal sinusoïdal (de pulsation variable) observé en DC, et sur la voie 2 le même signal en AC. On pourra ainsi tracer le diagramme de Bode de l'entrée AC.