

I] Ondes et signaux

1. Différents types d'ondes

a. Qu'est-ce qu'une onde ? un signal ?

- Une **onde** est un phénomène de **propagation** d'une **perturbation locale dans un milieu sans transport de matière mais avec transport d'énergie**.

Remarques :

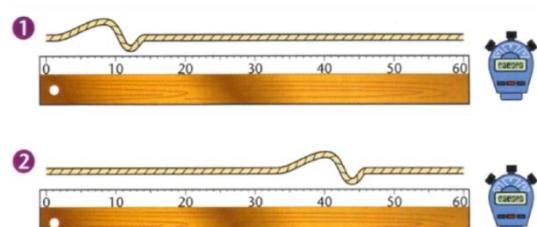
- La propagation résulte du couplage entre deux grandeurs physiques oscillantes. Par conséquent, une onde est caractérisée par **deux grandeurs physiques** appelés **signaux transportés par l'onde**.
- L'onde se déplace avec **une vitesse, appelée célérité notée « c »**, qui dépend du milieu de propagation.

On montre dans le cours de deuxième année que la célérité d'une onde mécanique s'exprime comme la racine du quotient d'un coefficient élastique sur une masse unitaire.

Exemple : Pour les ondes le long d'une corde : $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, avec **T** la tension de la corde (en N) et **μ** la masse linéique de la corde (en kg.m⁻¹).

Onde solitaire le long d'une corde.

Les signaux transportés par l'onde sont le déplacement vertical **y** de la corde et la tension de la corde **T** (non étudiée).



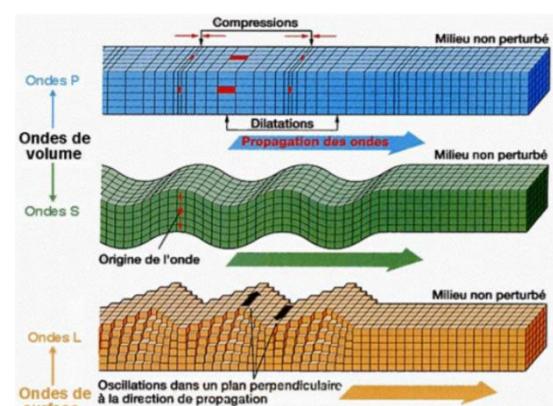
- Si on prend une photographie de la corde (*on fixe le paramètre t*), le déplacement vertical de la corde ne dépend que de l'abscisse du point considéré : $y = y(x)$.
(cf. Animation n°1 : <https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/retard.php>)
- Si on regarde le déplacement d'un point de la corde (*on fixe le paramètre x*), le déplacement vertical de ce point dépend que du temps : $y = y(t)$.
(cf. Animation n°2 : https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/evolution_temporelle.php)

On en conclut que le signal transporté par l'onde est **une fonction du temps et de l'espace**.

Ondes sismiques.

Les ondes P (*primaires*) de compression-dilatation qui se propagent à l'intérieur du sol (*ondes de volume*) et pour lesquelles la perturbation est parallèle à la direction de propagation (**ondes longitudinales**).

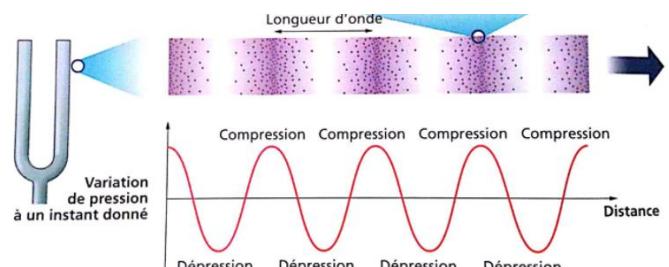
Les ondes S (*secondaires*) de cisaillement qui se propagent à l'intérieur du sol (*ondes de volume*) et pour lesquelles la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation (**ondes transversales**).



Les ondes L (*Love*) de cisaillement qui se propagent à l'interface sol-air. On parle **d'ondes de surfaces**. (cf. Animation n°3 : <https://www.viasvt.vivelessvt.com/tremblement-terre/tremblement-terre.html>)

b. Ondes acoustiques

Les signaux transportés par une onde acoustique sont la **surpression acoustique** $p(x,t)$ et la **vitesse** $\mathbf{v}(x,t)$ des particules fluides.



Quelques ordres de grandeurs :

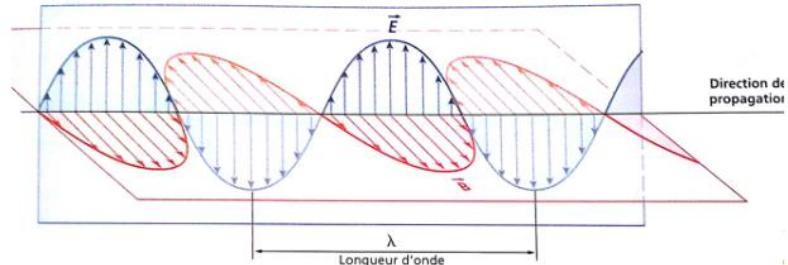
- Le domaine des fréquences audibles : [20 Hz ; 20 kHz].
- La célérité du son dans l'air : $c \approx 340 \text{ m.s}^{-1}$.
- La célérité du son dans l'eau : $c \approx 1500 \text{ m.s}^{-1}$.

c. Ondes électromagnétiques

Les signaux transportés par une onde électromagnétique sont le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} .

Les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide à la vitesse $c = 299792458 \text{ m.s}^{-1} \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

(cf. Animation n°4 : <https://www.geogebra.org/m/lAYD1Kob>)



Remarque : Une onde électrique est onde électromagnétique guidée le long d'un câble de transmission constitué de deux conducteurs. Dans ce cas les signaux transportés sont l'intensité du courant circulant dans le conducteurs et la tension entre les deux conducteurs.

d. Hypothèses et cadre de l'étude

Cette année, nous étudierons le cas d'une **propagation** :

- **unidimensionnelle** : la propagation a lieu dans une seule direction de l'espace.
- **linéaire** : il y a conservation de la fréquence lors de la propagation.
- **non dispersive** : la célérité de l'onde est indépendante de la fréquence.
- **sans absorption** : l'onde ne cède pas d'énergie au milieu de propagation.

e. Retour sur l'ARQS

L'étude des phénomènes de propagation est l'occasion de revenir sur une hypothèse importante du cours d'électrocinétique : l'**approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)**

Cette approximation consiste à considérer que le temps de propagation d'un signal est négligeable devant son temps de variation caractéristique.

Pour tester la validité de cette approximation, on compare la durée typique d'évolution du signal $T = 1/f$ et la durée de propagation de l'information $\Delta t = L/c$, avec L la longueur typique du phénomène de propagation. L'ARQS est donc valable si :

$$\Delta t \ll T \Rightarrow L \ll \frac{c}{f} = \lambda$$

Le cours d'onde sort précisément du cadre de l'ARQS car il s'intéresse à la propagation d'ondes sur des distances L grandes devant la longueur d'onde λ .

2. Ondes progressives

Une **onde progressive (ou régressive)** est une perturbation qui se propage dans l'espace et le temps. Par opposition aux ondes stationnaires, une onde progressive transporte de l'énergie.

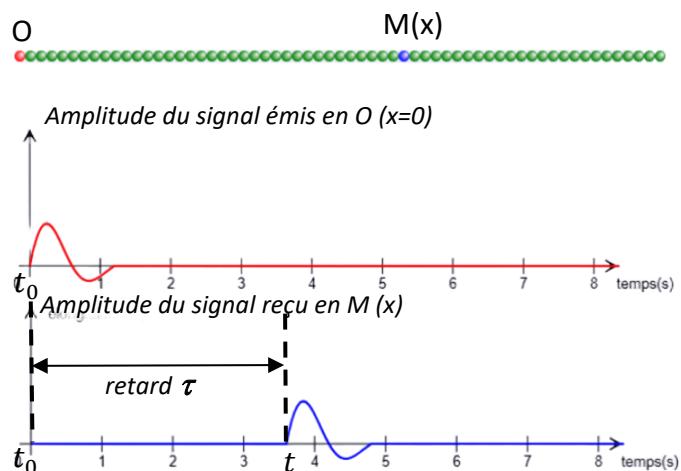
- Lorsque la propagation est **selon les x croissants (onde progressive)**, elle s'écrit mathématiquement comme une fonction d'une variable $f(t - \frac{x}{c})$ ou $g(x - ct)$.
- Lorsque la propagation est **selon les x décroissants (onde régressive)**, elle s'écrit mathématiquement comme une fonction d'une variable $f(t + \frac{x}{c})$ ou $g(x + ct)$.

Application : Ecrire les signaux transportés par une onde progressive sous la forme d'une fonction $f(t - \frac{x}{c})$ ou $f(t + \frac{x}{c})$

On suppose qu'un émetteur placé en **O** (d'abscisse $x = 0$) émet une onde se propageant dans le sens des **x croissants** à l'instant t_0 (à la célérité c). On note $s(x, t)$ le signal physique transporté par cette onde.

L'onde émise en **O** est caractérisée par le signal rouge $s(x = 0, t)$.

L'onde arrive au point **M** (d'abscisse x) avec un retard τ égal à la durée du trajet entre **O** et **M**.



1) Exprimer le retard τ de l'onde entre **O** et **M** en fonction de l'abscisse x et de la célérité c .

2) Exprimer l'instant t_0 d'émission de l'onde en fonction de l'instant de réception t et du retard τ .

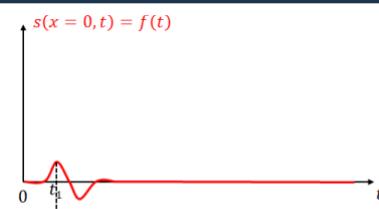
3) Sachant que $s(x, t) = s(x = 0, t_0)$ exprimer $s(x, t)$ comme une fonction f d'une seule variable $t - \frac{x}{c}$.

Remarque : Si l'onde se propage selon les x décroissants, le signal s'écrit : $s(x, t) = f(t + \frac{x}{c})$

Solution :

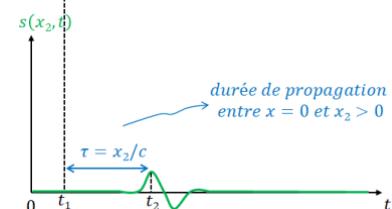
1)

$$\tau = \frac{x}{c}$$



2)

$$t_0 = t - \tau = t - \frac{x}{c}$$



3)

$$s(x, t) = s(x = 0, t_0) = s\left(x = 0, t - \frac{x}{c}\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

On constate un couplage entre la variable de temps et celle d'espace.

3. Modèle de l'onde monodimensionnelle progressive harmonique

a. Expression mathématique



Une onde **monodimensionnelle** (*une dimension*) progressive (qui *transporte de l'énergie*) harmonique (le signal est *sinusoïdal*) est un cas particulier d'onde progressive pour lequel la fonction associée au signal est sinusoïdale.

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi\right)$$

- **A** > 0 est l'amplitude et porte la dimension du signal (*S à la même unité que s(x, t)*).
- **ω** est la pulsation temporelle (*en rad.s⁻¹*).
- **c** est la célérité de l'onde (*en m.s⁻¹*).
- **φ** est la phase à l'origine des temps et des abscisses (*en rad*).

b. Double périodicité spatiale et temporelle



Montrons que le signal est périodique par rapport au temps de période temporelle **T** :

$$s(x, t + T) = A \cos\left(\omega(t + T) - \frac{\omega}{c}x + \varphi\right)$$

$$s(x, t + T) = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{T}T - \frac{\omega}{c}x + \varphi\right) = s(x, t)$$

Montrons que le signal est périodique par rapport à l'espace de période spatiale (ou longueur d'onde) **λ** :

$$s(x + \lambda, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(x + \lambda) + \varphi\right)$$

$$s(x + \lambda, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x - \frac{2\pi\lambda}{T} + \varphi\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x - \frac{2\pi}{T}T + \varphi\right) = s(x, t)$$

Par analogie avec la pulsation temporelle **ω** , on introduit la **pulsation spatiale k** (*en rad.m⁻¹*) :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$k = \frac{2\pi}{c} \times \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{c} \times \frac{\omega}{2\pi} \Leftrightarrow k = \frac{\omega}{c}$$

Ainsi, le signal s'écrit :

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Remarque : Dans la pratique, on exprime souvent $s(x, t)$ en représentation complexe pour faciliter les calculs :

$$\underline{s(x, t)} = A e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$$

c. Déphasage entre deux signaux

On définit la phase instantanée $\Phi(x, t)$ d'un signal $s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$:

$$\boxed{\Phi(x, t) = \omega t - kx + \varphi}$$

Application : Calculer un déphasage

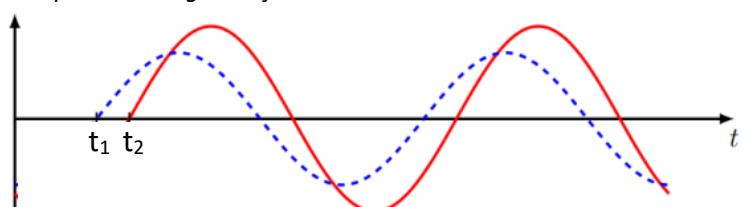
Un haut-parleur émet successivement à t_1 et t_2 avec $t_2 > t_1$ deux sons de même fréquence f avec une phase à l'origine nulle $\varphi = 0$.

Un microphone placé à une distance x du haut parleur reçoit les signaux :

$$s_1(x, t_1) = A_1 \cos(\omega t_1 - kx)$$

$$s_2(x, t_2) = A_2 \cos(\omega t_2 - kx)$$

Amplitude du signal reçu en x



Exprimer le déphasage $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ entre les signaux s_1 et s_2 en fonction du retard temporel $\Delta t = t_2 - t_1$.

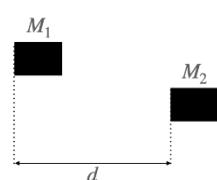
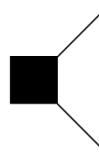
Solution :

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \omega t_2 - kx - (\omega t_1 - kx) = \omega(t_2 - t_1) = \omega \Delta t$$

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

Application : Déphasage dû à la propagation

Un son sinusoïdal de fréquence f , d'amplitude S de phase à l'origine nulle $\varphi = 0$ est émis par un haut-parleur situé à l'origine de l'axe (Ox). Il se propage dans le sens des x croissants.



Deux microphones sont placés aux abscisses $x_1 > 0$ et $x_2 > x_1$. Les signaux mesurés en x_1 et x_2 s'expriment :

$$s_1(x_1, t) = A_1 \cos(\omega t - kx_1) \quad \text{et} \quad s_2(x_2, t) = A_2 \cos(\omega t - kx_2)$$

1) Exprimer le déphasage $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ entre les signaux s_1 et s_2 en fonction de la distance entre les microphones $d = x_2 - x_1$ puis en fonction du retard du à la propagation $\tau = t_2 - t_1$.

2) En déduire une méthode pour mesurer la célérité de l'onde en mesurant la distance entre les microphones d et le retard τ .

Solution :

1) Le déphasage entre les signaux $\Delta\Phi$ vaut :

$$\Delta\Phi = \omega t - kx_2 - (\omega t - kx_1) = -k(x_2 - x_1) = -\frac{\omega}{c}d = -\omega(t_2 - t_1) = -\omega\tau$$

2) En mesurant le retard temporel τ entre les signaux et la distance d entre les microphones, on peut déduire la célérité de l'onde :

$$\frac{\omega}{c}d = \omega\tau \Leftrightarrow c = \frac{d}{\tau}$$

d. *Milieu dispersif, vitesse de phase*

Un milieu est dit **dispersif** pour un type d'onde si la vitesse de propagation d'une onde dépend de la fréquence (*idem la vitesse de propagation dépend de longueur d'onde*).

Dans un tel milieu, la notion de célérité est remplacée par la notion de vitesse de phase $v_\phi(\omega)$.

$$s(x, t) = A \cos\left(\omega(t - \frac{x}{v_\phi(\omega)}) + \varphi\right)$$

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - k(\omega)x + \varphi)$$

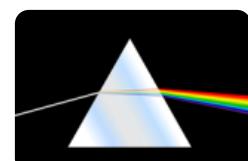
$$k(\omega) = \frac{\omega}{v_\phi(\omega)} \Leftrightarrow v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)}$$

La relation entre k et ω est appelée **relation de dispersion**.

Exemples de situations où la propagation est dispersive :

Ondes électromagnétiques dans un verre dispersif d'indice $n(\omega)$:

$$v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} = \frac{c}{n(\omega)}$$



Ondes de surface gravitaires en régime d'eaux profondes :

$$v_\phi(\omega) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$



Ondes électromagnétiques dans un plasma (*milieu homogène constitué de particules chargées*) :

$$v_\phi(\omega) = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$



II] Superposition de signaux et phénomènes d'interférences

1. Interférences entre deux ondes mécaniques
 - a. Mise en évidence du phénomène

Introduction

Obtenir de l'obscurité en superposant de la lumière et du silence en additionnant du bruit ...

Éliminer les bruits parasites pour écouter sa musique préférée ...

Voir des franges d'interférences contrastées qui disparaissent ...

Observer des flaques d'huiles de toutes les couleurs ...

Admirez des ailes de papillons bariolées et des écailles de poissons multicolores ...

Jouer à cache-cache derrière des fentes avec des particules subatomiques...

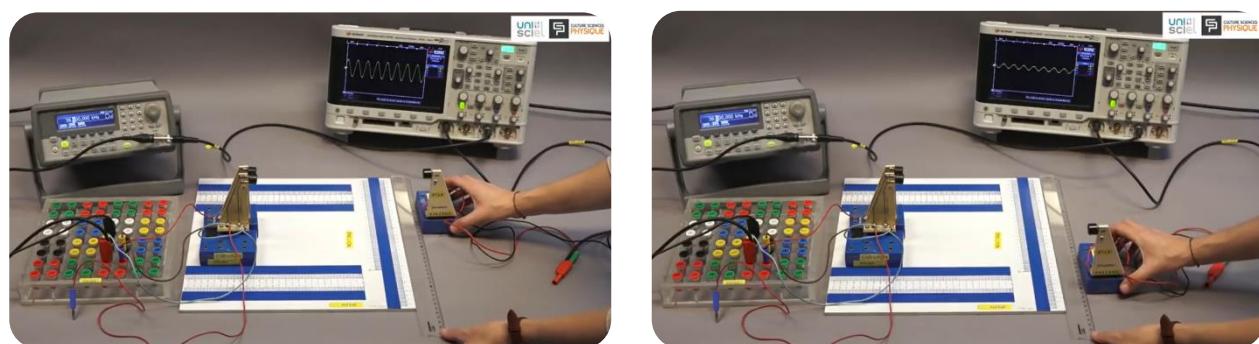
Mais qu'y a t'il de commun entre ces phénomènes ?

(cf. La physique animée, ENS de Lyon : <https://www.youtube.com/watch?v=PHkZVuvv8mA>)

Illustration du phénomène par l'expérience des fentes d'Young acoustique

Nous allons présenter l'équivalent de l'expérience des fentes d'Young (*expérience abordées en classe de terminale spécialité et reprise dans la suite*) avec des ondes acoustiques.

Nous utilisons un système d'émetteurs-récepteurs ultrasons, les deux émetteurs sont alimentés par un GBF à une fréquence proche de $f = 40 \text{ kHz}$, et nous sondons l'espace avec un récepteur relié à un oscilloscope.



Dans un premier temps si l'on alimente un seul émetteur. Sur le récepteur nous percevons simplement une forte amplitude face à l'émetteur puis le signal s'atténue avec l'éloignement.

Lorsque les deux émetteurs sont alimentés, observons maintenant le signal reçu :

- Il y a des zones de l'espace dans lesquelles le signal devient très faible et d'autres pour lesquelles l'intensité est forte.

Plaçons nous sur un minimum d'énergie et débranchons un émetteur.

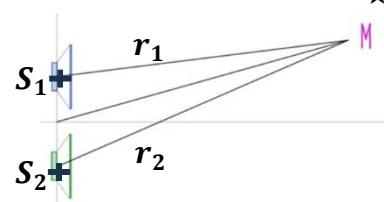
Lorsqu'on enlève une source, le signal devient plus fort ! Etonnant, non ?

Mais pourquoi obtient-on soit davantage de bruit soit au contraire du silence ?

b. Amplitude de l'onde résultante ★

Dans l'expérience, les deux émetteurs à ultrasons sont alimentés par le même GBF. On en déduit que les signaux émis sont :

- De même fréquence (on parle de signaux **synchrones**).
- De même phase à l'origine et fixée à 0 par le générateur (on parle de signaux **cohérents**).
- De même amplitude **A**.



Exprimons les signaux émis à partir de points sources **S₁** et **S₂** et reçus au point **M** :

$$s_1(M, t) = A \cos(\omega t - kr_1) = A \cos(\Phi_1)$$

$$s_2(M, t) = A \cos(\omega t - kr_2) = A \cos(\Phi_2)$$

Comme le milieu est linéaire, le signal reçu au point **M** est la somme des deux signaux :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = A \cos(\omega t - kr_1) + A \cos(\omega t - kr_2)$$

De plus, en se rappelant de la relation : $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$, il vient :

$$s(M, t) = 2A \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right)$$

Le premier facteur de l'expression $\cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right)$ module le signal dans l'espace.

On peut alors faire le lien entre le déphasage entre les deux signaux $\Phi(M) = \Phi_2 - \Phi_1$ et l'expression obtenue ci-dessus :

$$\Phi(M) = \omega t - kr_2 - (\omega t - kr_1) = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

• si $\Phi(M) = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ (signaux vibrant en phase), on obtient un signal maximal : on dit qu'il y a **interférences constructives**.

• si $\Phi(M) = (2p + 1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ (signaux vibrant en opposition de phase), on obtient un signal nul : on dit qu'il y a **interférences destructives**.

c. Conditions d'interférences

Les phénomènes d'interférences se produisent rarement dans la nature car les conditions d'interférences sont strictes : (*non démontrées dans le cas général en PTSI*)

- Les signaux doivent être de même fréquence (**signaux synchrones**) (*en pratique, la différence entre les fréquences doit être faible devant la fréquence de réponse du détecteur*).
- La différence entre les phases à l'origine des signaux ne doit pas dépendre du temps (**signaux cohérents**) : $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \neq f(t)$.

2. Interférences entre deux ondes lumineuses

- a. Problématique : en optique ondulatoire que mesure-t-on ?

En optique, le signal est une onde électromagnétique de fréquence $\nu \sim 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$: il n'existe aucun détecteur (ni l'œil humain, ni capteur électronique) capable de répondre à une telle vitesse d'oscillation. Il est donc impossible d'observer directement les oscillations du signal optique.

En réalité, **les détecteurs optiques mesurent l'intensité (ou puissance lumineuse) moyenne sur un grand nombre de périodes** (de l'ordre de 10^{13} périodes pour l'œil) :

$$I = k < s^2 >$$

Avec k une constante qui dépend des caractéristiques du détecteur.

Pour un signal $s(t) = A \cos(\omega t)$, l'intensité lumineuse vaut : $I = k < s^2 > = k \frac{A^2}{2}$

- b. Mise en évidence expérimentale : Expérience des fentes d'Young

Application : A partir de la simulation ci-dessous, répondez aux questions suivantes.

https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-interference/latest/wave-interference_fr.html

1) Qu'observez-vous à l'écran ?

2) Comment se comporte les fentes éclairées par une sources lumineuses d'ondes planes (les surfaces equiphase sont des plans) ?

3) Comment est modifiée la figure d'interférences si on modifie la **distance entre les fentes « a »** ? De même pour la **longueur d'onde « λ » de la radiation lumineuse émise** ? Et la **distance entre les fentes et l'écran « D »** ?

Dans la suite, nous allons proposer un modélisation de l'expérience des fentes d'Young et expliquer les observations ci-dessus. Commençons par définir quelques outils.

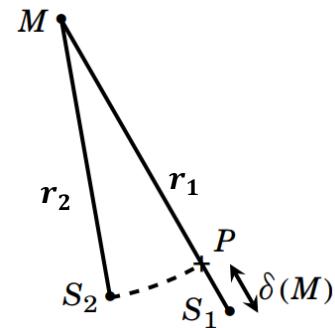
c. Chemin optique et différence de marche



On définit le **chemin optique** entre deux points A et B par : $(AB) = n \times AB$

- AB est la distance géométrique entre les deux points.
- n est l'indice optique du milieu considéré.

Soit deux sources S_1 et S_2 émettant deux rayons lumineux de même amplitude \mathbf{A} atteignant le point M . Le milieu de propagation est d'indice optique n .



On définit la **différence de marche** $\delta(M)$ entre les deux rayons :

$$\delta(M) = (S_1M) - (S_2M)$$

d. Déphasage entre les signaux



Les signaux reçus en M émis depuis les deux sources S_1 et S_2 s'écrivent :

$$s_1(M, t) = A \cos(\omega t - kr_1) \quad \text{et} \quad s_2(M, t) = A \cos(\omega t - kr_2)$$

On en déduit le déphasage $\Phi(M) = \Phi_2 - \Phi_1$ entre les deux signaux du à la propagation suivant les deux chemins :

$$\Phi(M) = \omega t - kr_2 - (\omega t - kr_1) = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

En se rappelant de la relation entre λ et λ_0 vu en optique géométrique :

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\frac{\lambda_0}{T}}{\frac{\lambda}{T}} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

Et en exprimant la différence de marche $\delta(M)$:

$$\delta(M) = (S_1M) - (S_2M) = nr_1 - nr_2 = n \times (r_1 - r_2)$$

En en déduit l'expression du déphasage $\Phi(M)$ en fonction de la différence de marche $\delta(M)$:

$$\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \times (r_1 - r_2)$$

$$\boxed{\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)}$$

e. Formule de Fresnel

Si deux sources optiques de même amplitude interfèrent, alors l'intensité lumineuse en un point \mathbf{M} de l'espace s'écrit :

$$I(\mathbf{M}) = 2I_0[1 + \cos(\Phi(\mathbf{M}))]$$

- I_0 est l'intensité issue d'une source.
- $\Phi(\mathbf{M})$ le déphasage entre les deux signaux qui interfèrent.

Preuve : Comme pour les interférences d'ondes mécaniques (cf. I), on doit sommer les signaux émis par les deux sources en tenant compte du déphasage dû à la propagation :

$$\mathbf{s}(\mathbf{M}, t) = \mathbf{s}_1(\mathbf{r}_2, t) + \mathbf{s}_2(\mathbf{r}_1, t)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{M}, t) = A\cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_1) + A\cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_2)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{M}, t) = 2A\cos\left(\frac{\mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}{2}\right)$$

On reconnaît le terme de déphasage : $\Phi(\mathbf{M}) = \mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$

On en déduit l'intensité lumineuse au point \mathbf{M} :

$$I(\mathbf{M}) = k < \mathbf{s}^2(\mathbf{M}, t) >$$

$$I(\mathbf{M}) = k < 4A^2\cos^2\left(\frac{\Phi(\mathbf{M})}{2}\right)\cos^2\left(\omega t + \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}{2}\right) >$$

$$I(\mathbf{M}) = 4kA^2\cos^2\left(\frac{\Phi(\mathbf{M})}{2}\right) < \cos^2\left(\omega t + \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}{2}\right) >$$

$$I(\mathbf{M}) = 2kA^2\cos^2\left(\frac{\Phi(\mathbf{M})}{2}\right)$$

De plus, en linéarisant le terme :

$$\cos^2\left(\frac{\Phi(\mathbf{M})}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\Phi(\mathbf{M}))}{2}$$

Et en identifiant le préfacteur kA^2 à deux fois l'intensité lumineuses I_0 émise par une seule source :

$$I_0 = k < \mathbf{s}_1^2 > = k < \mathbf{s}_2^2 > = \frac{kA^2}{2}$$

Il vient la formule de Fresnel qui fait le lien entre le déphasage entre les signaux reçus en \mathbf{M} et l'intensité lumineuse en \mathbf{M} :

$$I(\mathbf{M}) = 2I_0[1 + \cos(\Phi(\mathbf{M}))]$$

Remarque : Pour le cas où les amplitudes des sources sont différentes (cf : TD14 exo4), on a :

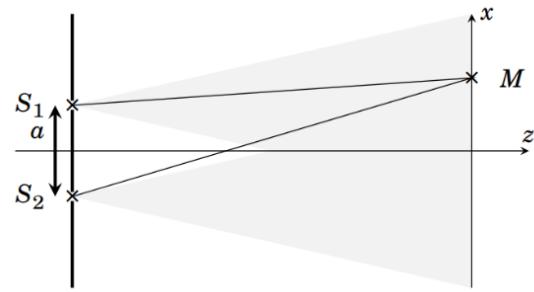
$$I(\mathbf{M}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi(\mathbf{M}))$$

f. Retour sur le dispositif des fentes d'Young



On revient sur le montage des fentes d'Young, éclairées par une source monochromatique.

Les deux fentes peuvent être vues comme des sources secondaires cohérentes entre elles qui émettent deux ondes **synchrones** dans un milieu d'indice n .



On observe la superposition des ondes au point **M** (d'abscisse x) sur un écran placé à une grande distance $D \gg a$.

On calcule la différence de marche $\delta(M)$ au point M entre les deux ondes reçues :

$$\delta(M) = (S_2 M) - (S_1 M) = n \times S_2 M - n \times S_1 M$$

$$\delta(M) = n \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} - n \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} = nD \sqrt{1 + \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2} - nD \sqrt{1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2}$$

On effectue un développement limité ($\sqrt{1+X} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + \frac{1}{2}X$) en considérant $x \ll D$ et $x \ll a$:

$$\delta(M) \approx nD \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D} \right)^2 \right) - nD \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D} \right)^2 \right)$$

$$\delta(M) \approx nD \left(1 + \frac{x^2 + ax + \frac{a^2}{4}}{2D^2} \right) - nD \left(1 + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4}}{2D^2} \right) \Leftrightarrow \boxed{\delta(M) \approx \frac{nax}{D}}$$

Finalement, d'après ce qui précède, le déphasage et l'intensité au point **M** s'expriment :

$$\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{nax}{D} \Rightarrow \boxed{I(M) = 2I_0 [1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax}{D} \right)]}$$

On identifie dans l'expression précédente la distance entre deux franges sombres (ou brillantes) successives, appelée interfrange i à la période spatiale d'oscillation :

$$\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax}{D} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{i} \times x \right) \Leftrightarrow \boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

De plus, les interférences sont constructives en **M**, si l'intensité lumineuse $I(M)$ est maximale :

$$\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax}{D} \right) = +1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax_p}{D} = 2\pi \times p \Leftrightarrow x_p = p \times \frac{\lambda D}{a} = p \times i \quad , \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$