Devoir surveillé de physique-chimie n°4

(durée 3h)

Correction – Parcours bleu

Le sujet comporte 07 pages et est composé de 3 exerices indépendants les uns des autres. La calculatrice est autorisée.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les expressions littérales et les résultats de leurs calculs.

Données :

— Champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81$ m.s^{-2}

— L'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 s'écrit

$$\mathcal{E}_{p,e} = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2$$

où x désigne l'allongement du ressort.

— **Notation complexe** : pour une fonction $x(t) = X_m\cos(\omega t+\phi)$, on notera :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t+\phi)} = X_m e^{j\phi}e^{j\omega t} = \underline{X}e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{X} \text{ l'amplitude complexe de } x(t).$$

On a donc : $X_m = |\underline{X}|$ et $\phi = \arg(\underline{X})$.

Étude de la suspension d'un véhicule – d'après CCP 2013 TSI

I. Suspension sans amortissement

1. Bilan des forces :
- Le poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$
- La force de rappel du ressort $\overrightarrow{F} = -k(z-\ell_0)\overrightarrow{u_z}$

2. À l'équilibre, la somme des forces est nulle. Ainsi :

$$\boxed{z_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

3. On applique le principe fondamental de la dynamique au véhicule de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -mg\overrightarrow{u_z} - k(z-\ell_0)\overrightarrow{u_z}$$

En projetant selon z, on obtient :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}(\ell_0 - \frac{mg}{k}) = \frac{k}{m}z_e$$

On identifie donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{k}{m}z_e}$.

4. La solution générale du mouvement s'écrit :

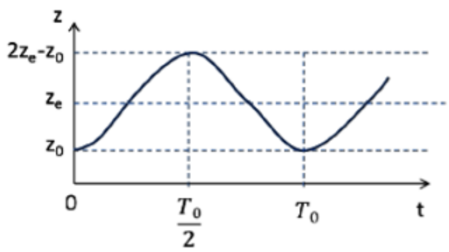
$$z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + z_e$$

Application numérique : $\omega_0 = 10$ rad.s^{-1} et $T_0 = 0,63$ s.

5. Grâce aux conditions initiales, on en déduit :

$$z(t) = z_e + (z_0 - z_e)\cos(\omega_0 t)$$

6. On calcule $z(t)$ pour différentes valeurs de t : $z(T_0/4) = z_e$, $z(T_0/2) = 2z_e - z_0$, $z(3T_0/4) = z_e$, $z(T_0) = z_0$.
D'où l'allure ci-dessous et $z_{\text{moy}} = z_e$, $z_{\max} = 2z_e - z_0$, $z_{\min} = z_0$.



7. $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2(z_0 - z_e)^2\sin^2(\omega_0 t)$.
Donc $\mathcal{E}_c(T_0/2) = \mathcal{E}_c(0) = 0$.
D'après le principe de conservation de l'énergie $\mathcal{E}_p(T_0/2) = \mathcal{E}_p(0)$. À ces deux instants, toute l'énergie est donc sous forme d'énergie potentielle.

II. Suspension avec amortissement

8. h s'exprime en kg.s^{-1}

9. Il faut reprendre le bilan des forces de la question 1 et y ajouter la force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -hv\overrightarrow{u_z}$.

La position d'équilibre est inchangée puisqu'à l'équilibre la vitesse est nulle, de même donc pour $\overrightarrow{f}$.

10. L'équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e}$$

11. L'équation caractéristique de cette équation différentielle s'écrit :

$$r^2 + \frac{h}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut :

$$\Delta = \left(\frac{h}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$$

On distingue alors trois régimes d'évolution :

— Le régime apériodique dans le cas où $h > 2\sqrt{km}$

— Le régime critique dans le cas où $h = 2\sqrt{km}$

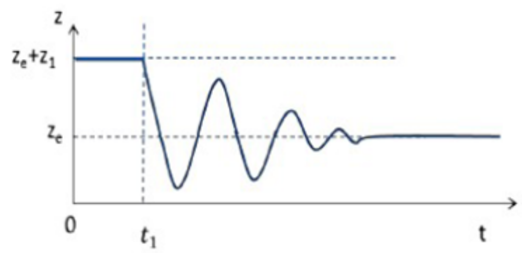
— Le régime pseudo-périodique dans le cas où $h < 2\sqrt{km}$

12. **a.** Soit m la masse du véhicule à vide et M la masse de la charge. Si la suspension est en régime critique lorsque le véhicule est à vide, alors $h = 2\sqrt{km}$. En charge, $m' = m + M > m$, par conséquent $h < 2\sqrt{km'}$, le régime devient pseudo-périodique.

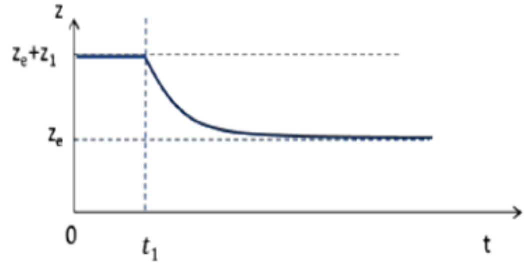
b. Pour ne pas que la suspension soit en régime pseudo-périodique même en charge, il faut choisir $h > 2\sqrt{km}$. Dans la pratique, on peut supposer que $M << m$ et que par conséquent, même en charge, la suspension reste en régime apériodique si $h = 2\sqrt{km}$.

13. **a.** $z(t < t_1) = z_1 + z_e$ et $z(t >> t_1) = z_e$.

Dans le régime pseudo-périodique, on en déduit l'allure du graphe ci-dessous :



b. Dans le régime apériodique, on en déduit l'allure du graphe ci-dessous :



III. Régime forcé

14. La longueur du ressort est donnée par $\ell(t) = z(t) - z_s$. La force de rappel s'écrit donc :

$$\boxed{= -k(z - z_s - \ell_0)\overrightarrow{u_z}}$$

15. En appliquant la deuxième loi de Newton au véhicule dans le référentiel terrestre, on a :

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -mg\overrightarrow{u_z} - h\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_s}{dt}\right)\overrightarrow{u_z} - k(z - z_s - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$$

En projetant selon l'axe z, on obtient :

$$\boxed{m\frac{d^2z}{dt^2} + h\frac{dz}{dt} + kz = h\frac{dz_s}{dt} + kz_s + kz_e}$$

16. On pose $z' = z - z_e$: on a alors $\dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{dz}{dt}$ et $\dfrac{d^{2\prime}}{dt^2} = \dfrac{d^2z}{dt^2}$. L'équation précédente s'écrit alors :

$$m\frac{d^2z'}{dt^2} + h\frac{dz'}{dt} + kz' = Y(t)$$

avec $\boxed{Y(t) = h\dfrac{dz_s}{dt} + kz_s}$.

17. En utilisant la représentation complexe, on peut écrire :

- $\underline{Z'} = \underline{Z_m}e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z'_m} = Z_me^{j\phi}$
- $\underline{Z_s} = Z_{sm}ej^{\omega t}$

On peut alors passer l'équation différentielle en représentation complexe et exprimer l'amplitude complexe $\underline{Z'}$:

$$\underline{Z'}(-m\omega^2 + j\omega h + k) = \underline{Z_s}(j\omega h + k)$$

soit

$$\frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}} = \frac{j\omega h + k}{-m\omega^2 + j\omega h + k}$$

En posant $\lambda = h/2m$ et $\omega_0^2 = k/m$, on obtient :

$$\frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}} = \frac{\omega_0^2 + 2j\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda}$$

En prenant le module de cette expression (qui est en fait la fonction de transfert de la suspension), on obtient l'expression demandée :

$$\left|\frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}}\right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\omega^2\lambda^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$

18. **a.** Pour $\omega \to 0$, $H \to 1$. Dans ce cas, la masse suit directement le relief du sol : $z = z_e + z_s$ à tout instant t.

b. Pour $\omega \to \infty$, $H \to 0$. Dans ce cas, la masse m ne bouge pas verticalement et on a, à tout instant t, $z = z_e$.

c. ω_r est la pulsation pour laquelle le dénominateur est minimal. On pose $g(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2$ afin d'étudier ses variations. La dérivée de cette fonction s'écrit :

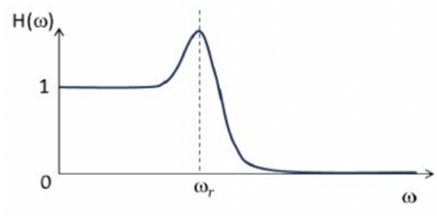
$$g'(\omega) = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega\lambda^2$$

La dérivée s'annule pour $\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$. L'énoncé précise que l'on est dans le cas où $\omega_0^2 > 4\lambda^2$, donc :

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0 - 2\lambda^2}}$$

La fonction de transfert H de la suspension est maximale à ω_r, ce qui correspond à la résonance de la suspension.

19. On trace l'allure de $H(\omega)$ à l'aide des limites calculées précédemment :



Circuit bouchon

1. $\underline{Z_s} = r + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C} = r + j\omega\dfrac{Qr}{\omega_0} + \dfrac{Qr\omega_0}{j\omega} = \boxed{r\left(1 + j\omega\dfrac{Q}{\omega_0} + \dfrac{Q\omega_0}{j\omega}\right)}$

2. On obtient

$$\underline{Z} = \frac{\dfrac{r+j\omega L}{j\omega C}}{r + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega c}} = \frac{r + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega rC}$$

$$= \frac{r + j\omega\dfrac{Qr}{\omega_0}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

$$= \frac{r}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}} \times \left(1 + j\omega\frac{Q}{\omega_0}\right)$$

Or $jC\omega\underline{Z_s} = 1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}$

d'où :

$$\underline{Z} = \frac{r}{j\omega C\underline{Z_s}}\left(1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0}\right)$$

3. Avec l'hypothèse proposée : $\left(1 + \dfrac{jQ\omega}{\omega_0}\right) \approx \dfrac{jQ\omega}{\omega_0}$, aussi :

$$\underline{Z_s} \approx \frac{r}{j\omega C\underline{Z_s}} \times \frac{jQ\omega}{\omega_0} \approx \frac{rQ}{C\omega_0\underline{Z_s}}$$

Comme $\dfrac{1}{C\omega_0} = Qr$, on arrive à l'expression proposée

$$\boxed{\underline{Z} \approx \frac{Q^2 r^2}{\underline{Z_s}}}$$

4. $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque $|\underline{Z_z}|$ est minimal. D'après l'expression obtenue à la question 1, on a :

$$\underline{Z_s} = r\left(1 + j\left(\frac{Q\omega}{\omega_0} - \frac{Q\omega_0}{\omega}\right)\right) \Rightarrow |\underline{Z_s}| = r\sqrt{1 + \left(\frac{Q\omega}{\omega_0} - \frac{Q\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

On note immédiatement que $|\underline{Z_s}|$ est minimal lorsque $\omega = \omega_0$, et donc $|\underline{Z}|$ est maximal.

5. Pour $\omega = \omega_0$, on a $\underline{Z_s} = r \Rightarrow \underline{Z} = Q^2 r$.

L'intensité totale traversant le circuit est donc $\underline{i} = \dfrac{\underline{e}}{\underline{Z}} = \dfrac{\underline{e}}{r} \Rightarrow i(t) = \dfrac{E_0}{r}\cos(\omega t)$.

D'autre part, on a $\underline{i_c} = \dfrac{\underline{e}}{\underline{Z_c}} = j\omega_0 C\underline{e} = j\dfrac{1}{Qr}\underline{e} \Rightarrow \boxed{i_c = \dfrac{E_0}{Qr}\cos(\omega t + \pi/2) = -\dfrac{E_0}{Qr}\sin(\omega t)}$.

D'après la loi des nœds, on trouve également :

$$\boxed{i_L = i - i_c = \frac{E}{r}\left(\cos(\omega t) - \frac{1}{Q}\sin(\omega t)\right)}$$

Étude d'un filtre

1. On étudie le filtre à hautes et basses fréquences pour déterminer sa nature.

— Pour $\omega \to 0$, le condensateur est équivalent àa un interrupteur ouvert. On voit qu'on a alors un pont diviseur de tension : $u_s = \dfrac{R_2}{R_2 + R_1} u_e$.

— Pour $\omega \to +\infty$, le condensateur est ´equivalent à un fil : la résistance est court-circuitée, donc $u_s = 0$ (aucun courant dans R_2).

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

2. On détermine d'abord l'admittance équivalente à l'association parallèle de R_2 et C :

$$\underline{Y_{\text{eq}}} = \underline{Y_R} + \underline{Y_C} = \frac{1}{R_2} + jC\omega \Leftrightarrow \underline{Y_{\text{eq}}} = \frac{1 + jR_2 C\omega}{R_2}$$

On obtient ensuite l'expression de la fonction de transfert grâce à un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_s} = \frac{1}{1 + R_1 \underline{Y_{\text{eq}}}}\underline{u_e} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2} + jR_1 C\omega}\underline{u_e} = \frac{1}{A + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\underline{u_e}$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{1}{A + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad A = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{R_1 C}}$$

3. Le filtre est passe-bas d'ordre 1 : il y a donc une seule pulsation de coupure ω_c définie par :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Le gain maximal est donné lorsque la pulsation tend vers l'infini : dans ce cas, $G_{\max} = 1/A$. L'équation précédente se réecrit donc :

$$\frac{1}{\sqrt{A + \dfrac{\omega_c^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}A} \Leftrightarrow \boxed{\omega_C = A\omega_0}$$

a. La fonction de transfert du filtre se réecrit en fonction de la fréquence :

$$\boxed{\underline{H}(f) = \frac{1}{A + j\dfrac{f}{f_0}}}$$

b. Comportement asymptotique du gain en décibels . Le gain en décibels s'écrit :

$$G_{\text{dB}}(f) = -10\log\left(A^2 + \frac{f^2}{f_0^2}\right)$$

— Pour $f \to 0$, $G_{\text{dB}} \to -20\log(A) = -20\log(10) = -20$ dB : on a donc une asymptote horizontale de valeur -20 dB.

— Pour $f \to \infty$, $G_{\text{dB}} \to -20\log(f/f_0) = 20\log(f_0) - 20\log(f)$ dB : on a donc une asymptote -20 dB par décade.

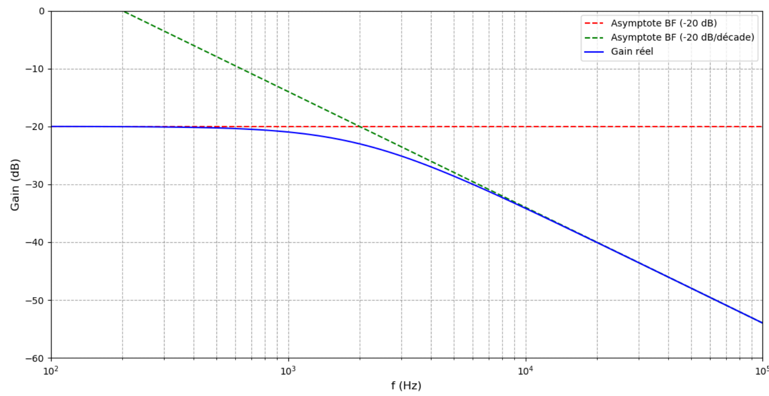
Comportement asymptotique de la phase. Celle-ci s'écrit :

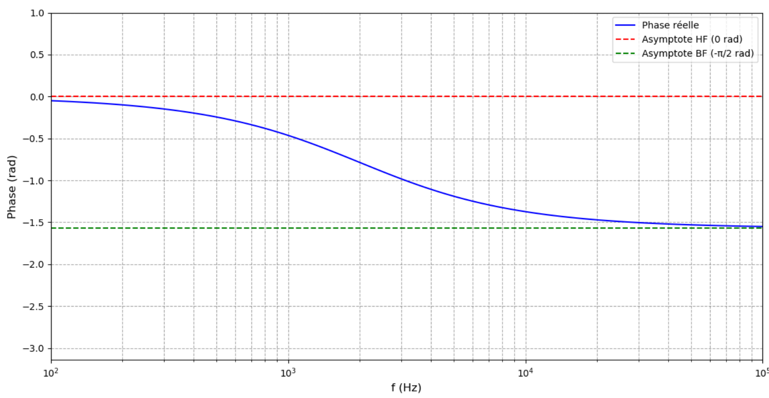
$$\phi(f) = -\arctan\left(\frac{f}{Af_0}\right)$$

— Pour $f \to 0$, $\phi \to 0$ on a donc une asymptote horizontale de valeur 0 rad.

— Pour $f \to \infty$, $\phi \to -\pi/2$, on a donc une asymptote horizontale de valeur $-\pi/2$ rad.

c.





4. Dans le cas où le signal d'entrée à une pulsation $\omega = 1000\omega_0$, on peut calculer l'amplitude du signal de sortie grâce au gain du filtre :

$$G(1000\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{10 + 1000\dfrac{\omega_0}{\omega}}} \approx 10^{-3} = \frac{U_s}{U_e}$$

L'amplitude du signal de sortie est donc diminuée d'un facteur 1000 par rapport à celle de l'entrée :

$$U_s = \frac{U_e}{1000} = \frac{10}{1000} = 0,01 \quad \text{V}$$

La phase du signal de sortie est dans ce ca snulle (par lecture sur le diagramme de Bode donné ci-dessus. Le signal de sortie est donc considérablement atténué et s'écrit ainsi :

$$\boxed{u_s(t) = 0,01\cos(1000\omega_0 t)}$$

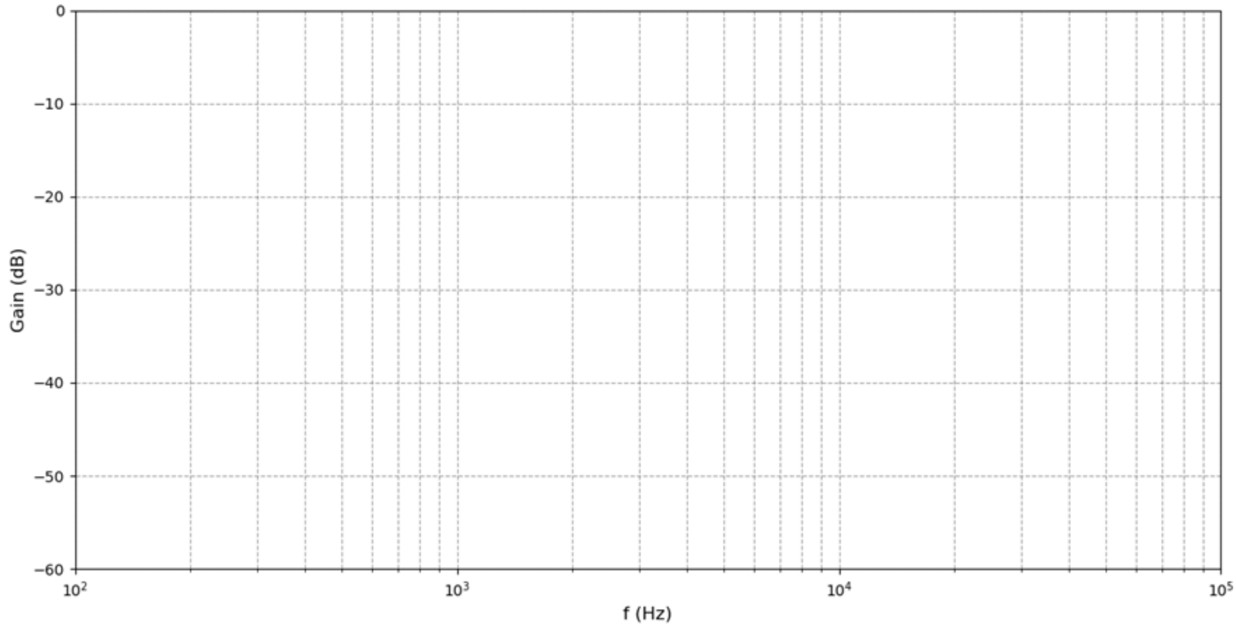
5. Si le signal d'entrée est un signal créneau de pulsation $1000\omega_0$, on se place dans le domaine intégrateur du filtre : **l'intégrale d'un signal créneau est un signal triangulaire de même pulsation**.

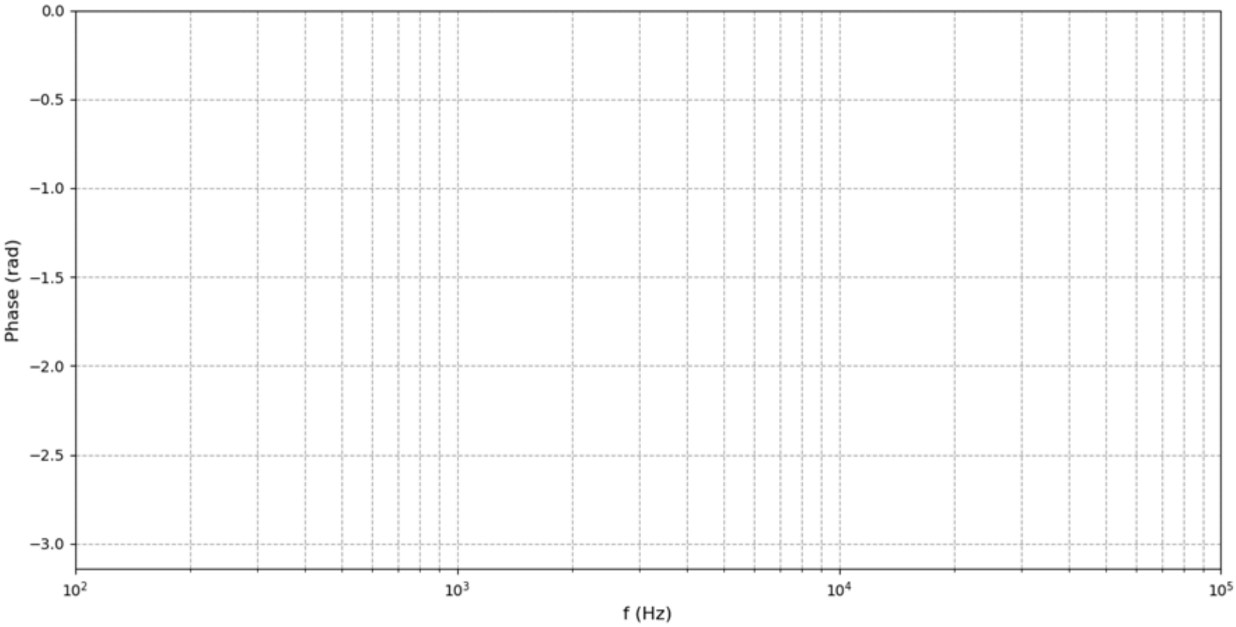
6. On reprend l'expression de la fonction de transfert en fonction de la pulsation :

$$\frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{A + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \Leftrightarrow \underline{U_s}\left(A + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \underline{U_e}$$

En repassant en écriture temporelle (on remplace la multiplication par $j\omega$ par une dérivée première), la tension de sortie obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{du_s}{dt} + \omega_0 A u_s(t) = \omega_0 u_e(t)}$$


0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
Gain (dB)
10^2
10^3
10^4
10^5
f (Hz)


0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
Phase (rad)
10^2
10^3
10^4
10^5
f (Hz)