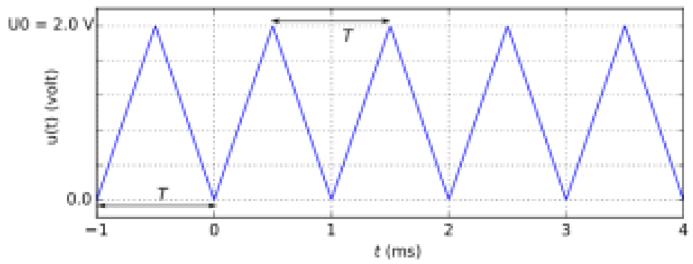
DS N°4 Signaux périodiques, filtrage et propagation des signaux (2h)

Exercice n°1 : Signaux périodiques

1. Tracé ci-dessous :



2. La fréquence est $\boxed{f = \frac{1}{T} = 1,0.10^3 \text{ Hz} = 10 \text{ kHz}}$.

La pulsation est $\boxed{\omega = 2\pi f = 6,3.10^3 \text{rad.s}^{-1}}$.

L'amplitude crête à crête est $\boxed{U_{cr-cr} = 20 \text{ V}}$.

3. Le signal est symétrique par rapport à 1 V, donc sa valeur moyenne sera de 1 V. Confirmons ceci en calculant $< u(t) >$:

$$
\begin{aligned}
< u(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} u(t)dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} u(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2U_0\frac{t}{T}dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} \left(2U_0 - 2U_0\frac{t}{T}\right)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2U_0\frac{t}{T}dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0 dt - \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0\frac{t}{T}dt
\end{aligned}
$$

Il y a trois intégrales. Calculons-les séparément :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2U_0\frac{t}{T}dt &= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\int_0^{T/2} t dt \\
&= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{T/2} \\
&= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left(\frac{T^2}{8} - 0\right) \\
&= \frac{U_0}{4}
\end{aligned}
$$

Puis la seconde :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0 dt &= \frac{1}{T}2U_0\int_{T/2}^{T} dt \\
&= \frac{1}{T}2U_0\,[t]_{T/2}^{T} \\
&= \frac{1}{T}2U_0\left(T - \frac{T}{2}\right) \\
&= \frac{1}{T}2U_0\frac{T}{2} \\
&= U_0
\end{aligned}
$$

Et la troisième :

$$\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0\frac{t}{T}dt$$

$$= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\int_{T/2}^{T} tdt$$

$$= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{T/2}^{T}$$

$$= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left(\frac{T^2}{2}-\frac{T^2}{8}\right)$$

$$= \frac{3U_0}{4}$$

Finalement on somme les trois :

$$< u(t) >= \frac{U_0}{4} + U_0 - \frac{3U_0}{4}$$

$$\boxed{< u(t) >= \frac{U_0}{2} = 1,0 \text{ V}}$$

4. On en déduit la valeur efficace :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{< u^2(t) >}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$

$$= \sqrt{\frac{U_0^2}{3}}$$

soit : $\boxed{U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{3}}$

Complément : Démontrons le résultat admis dans l'énoncé. On commence par calculer :

$$\int_0^{T/2} u^2(t)dt = \int_0^{T/2}\left(2U_0\frac{t}{T}\right)^2 dt$$

$$= \frac{4U_0^2}{T^2}\int_0^{T/2} t^2dt$$

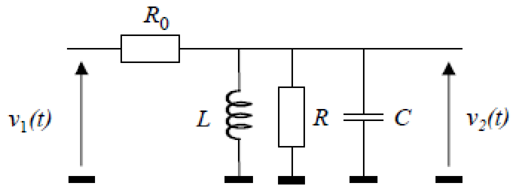
$$= \frac{4U_0^2}{T^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{4U_0^2}{T^2}\frac{T^3}{3\times 2^3}$$

$$= \frac{U_0^2 T}{6}$$

Ensuite, vu que l'intégrale est l'aire sous lacourbe et que cette aire va être la même entre 0 et $T/2$ qu'entre $T/2$ et T, on va avoir également $\int_{T/2}^{T} u^2(t)dt = \frac{U_0^2 T}{6}$.
D'où le résultat annoncé dans l'énoncé en sommant les deux.

5. **Note : l'énoncé comportait deux erreurs : sur la période $T = 1,0ms$ et une sur la tension maximale $U_0 = 2,0V$. La question n'a pas été notée.**
Le a/ ne convient pas car la valeur moyenne est égale à 1,0V, et non pas à 0,5V comme donné ici par le pic à fréquence nulle.
Le /b ne convient pas à cause de la fréquence du fondamental qui est de 2 kHz.
Le c/ convient : bonne valeur moyenne, bonne fréquence de 1 kHz du fondamental.
Le d/ ne convient pas car il serait de valeur moyenne nulle.



Exercice n°2 : Etude d'un filtre (d'après Physique A PT 2021)

1. $$\boxed{\underline{z_c}(\omega) = \frac{1}{j^{\omega} C} \quad ; \quad \underline{Z_L} = j\omega L \quad ; \quad \underline{Z_R} = R}$$

2. Aux basses fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. Ainsi $v_2(t) = 0$.
   Aux hautes fréquences, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil. Ainsi $v_2(t) = 0$

   Le filtre est un filte passe-bande.

   Par définition, $\underline{Z} = \dfrac{1}{\underline{Y}}$ où $\underline{Y}$ désigne l'admittance du dipôle.

3. Les dipôles sont en parallèle donc on ajoute les admittances :

$$\boxed{\underline{Y_{eq}} = \underline{Y_c} + \underline{Y_L} + \underline{Y_R} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R}}$$

4. En utilisant un pont diviseur de tension, on trouve :

$$\boxed{\underline{v_2} = \frac{1}{1 + R_0 \underline{Y_{eq}}} \underline{v_1}}$$

5. Par définition :

$$\begin{aligned}
\underline{H_F} &= \frac{\underline{v_2}}{\underline{v_1}} \\
&= \frac{1}{1 + R_0 \underline{Y_{eq}}} \\
&= \frac{1}{1 + R_0 \left(j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \right)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R} + R_0 \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right)} \\
&= \frac{1}{\frac{R_0 + R}{R} + R_0 \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right)} \\
&= \frac{\frac{R}{R + R_0}}{1 + \frac{R R_0}{R + R_0} \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right)} \\
&= \frac{H_0}{1 + jQ_F \left(x - \frac{1}{x} \right)}
\end{aligned}$$

avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $\boxed{H_0 = \dfrac{R}{R + R_0}}$.

Par identification, on trouve $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q_F = \dfrac{R R_0}{R + R_0} \sqrt{\dfrac{C}{L}}}$.

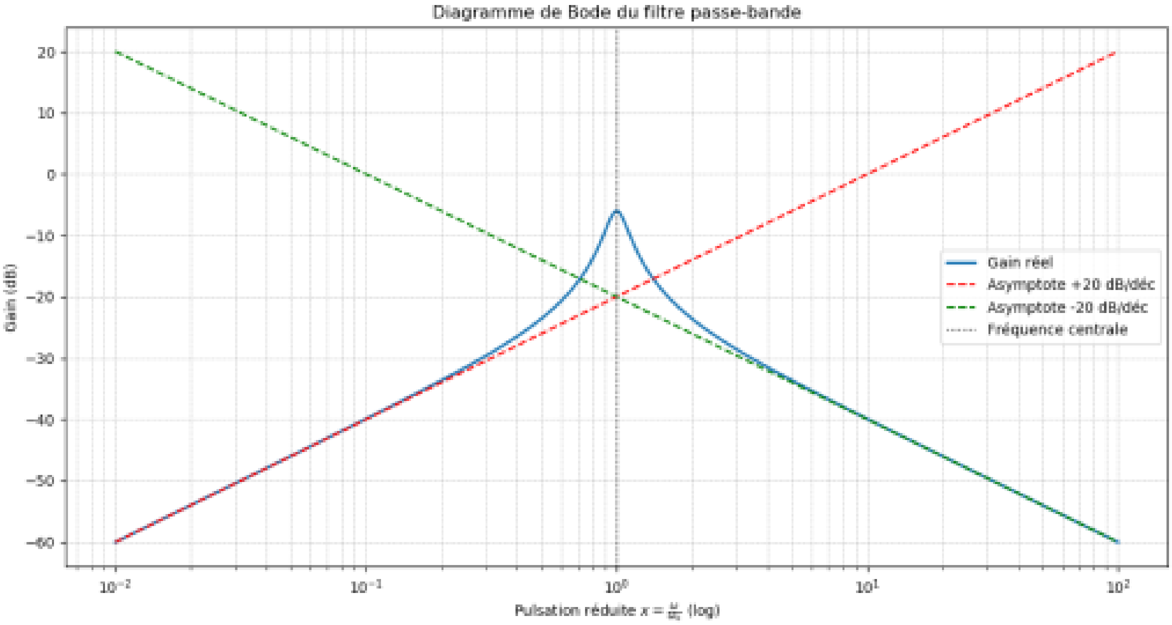
6. $$G_{dB}(x) = 20 \log \left| \underline{H_F} \right| = 20 \log \left(\frac{H_0}{\sqrt{1 + Q_F^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} \right) = 20 \log H_0 - 10 \log \left(1 + Q_F^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right)$$

7. Aux BF, $G_{dB} \to 20 \log \left(\dfrac{H_0}{Q_F} \right) + 20 \log x$. On a une asymptote de +20dB/décade.

Aux HF, $G_{dB} \to 20\log\left(\frac{H_0}{Q_F}\right) - 20\log x$. On a une asymptote de -20dB/décade.

Il s'agit bien d'un filtre passe-bande.

8.



Exercice n°3 : Etude d'un RADAR (RAdio Detection And Ranging)

Un radar possède une antenne émettrice qui émet des salves de durée $\tau_1 = 1{,}0\ \mu s$ d'ondes électromagnétiques de fréquence $f = 2{,}90\ GHz$ avec un intervalle d'émission de $T_1 = 100{,}0\ \mu s$.

Lorsqu'une impulsion rencontre un objet réfléchissant, elle est renvoyée puis détectée par la même antenne en mode récepteur. Celle-ci est alternativement émettrice puis réceptrice.

Q1. Calculer la période temporelle **T** et la période spatiale λ (ou longueur d'onde) des ondes émises pendant une salve d'émission.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2{,}90 \times 10^9} = 3{,}45 \times 10^{-10} s$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00 \times 10^8}{2{,}90 \times 10^9} = 1{,}03 \times 10^{-1} m$$

Q2. Ecrire l'expression mathématique du signal $s(x,t)$ pendant une salve d'émission en explicitant les noms et si possible les unités de chacun des termes de l'équation.

$$s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

- **A l'amplitude (même unité que s)**
- **ω la pulsation temporelle (rad/s)**
- **k la pulsation spatiale (rad/m)**
- **φ la phase à l'origine des temps et des abscisses (rad)**

Q3 Calculer le nombre ***N*** d'oscillations dans une salve.

$$N = \frac{\tau_1}{T} = \tau_1 f = 1{,}0 \times 10^{-6} \times 2{,}90 \times 10^9 = 2{,}9 \times 10^3$$

Une salve est émise à $t_0 = 0,0$ µs, puis son écho est reçu par le radar à $t_1 = 80,0$ µs.

Q4. Déterminer la distance d à laquelle se trouve l'objet détecté (supposé immobile).

$$d = \frac{1}{2} \times (t_1 - t_0) \times c = 0,5 \times 80,0 \times 10^{-6} \times 3,00 \times 10^{8} = 1,2 \times 10^{4} m$$

Q5. Montrer qu'il existe une distance minimale d_{min} en dessous de laquelle on ne peut pas détecter un objet et calculer sa valeur numérique.

Le Radar ne peut pas recevoir un écho avant d'avoir émis la totalité de la salve.

$$d_{min} = \frac{1}{2} \times \tau_1 \times c = 0,5 \times 1,0 \times 10^{-6} \times 3,00 \times 10^{8} = 150\ m$$

Q6. Pour déterminer la vitesse d'un objet, on envisage d'utiliser l'effet Doppler : si l'objet s'éloigne à la vitesse ***v*** :

$$f_{reçue} = f_{émise}\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Déterminer la variation relative de fréquence $\Delta f = \frac{f_{émise} - f_{reçue}}{f_{émise}}$ pour un avion s'éloignant du radar à ***v = 150 m.s⁻¹***. Conclure sur la faisabilité de cette méthode.

$$f_{reçue} = f_{émise}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$f_{reçue} - f_{émise} = f_{émise}\left(1 - \frac{v}{c}\right) - f_{émise}$$

$$\Delta f = \frac{f_{émise} - f_{reçue}}{f_{émise}} = \frac{v}{c}$$

$$\Delta f = \frac{150}{3,00 \times 10^{8}} = 5,00 \times 10^{-7} Hz$$

Pour mesurer, la vitesse de l'avion par effet Doppler, il faut mesurer une variation relative de fréquence de $5,00 \times 10^{-7} Hz$. La mesure ne sera pas précise.

Bonus : Proposer une méthode alternative pour mesurer la vitesse de l'avion avec le radar.

On peut mesurer la position de l'avion à deux salves successives et calculer la vitesse moyenne.

$$v_{moy} = \frac{d_2 - d_1}{T_1}$$