Exercices d'applications :

□ Exercice 15.1. Freinage d'urgence ★ (Coordonnées cartésiennes, équations horraires)

Une voiture, animée d'une vitesse $v_0 = 90$ km.h^{-1} sur une trajectoire rectiligne, freine avec une accélération constante de norme $a = 4,2$ m.s^{-2}. Calculer la durée et la distance de freinage.

□ Exercice 15.2. Ballon-sonde ★ (Coordonnées cartésiennes, trajectoire)

On assimile un ballonsonde à un point matériel $\boldsymbol{M}$. Lâché au niveau du sol, il acquiert quasi immédiatement une vitesse verticale $\boldsymbol{v_z}$ par rapport au référentiel terrestre ($\mathcal{R}$), qu'on suppose constante dans la suite du mouvement.

Le vent lui communique une vitesse horizontale $\boldsymbol{v_x}$ orientée suivant l'axe horizontal cartésien $(\boldsymbol{Ox})$ et proportionnelle à son altitude $\boldsymbol{z}$ mesurée par rapport au niveau du sol : $\boldsymbol{v_x} = \frac{z}{\tau}$, où $\boldsymbol{\tau}$ est une constante positive dimensionnellement homogène à un temps.

À l'instant $\boldsymbol{t = 0}$, le ballonsonde est lâché depuis le point $\boldsymbol{O}$. On note $(\boldsymbol{x(t)}, \boldsymbol{z(t)})$ les coordonnées cartésiennes du point $\boldsymbol{M}$.

1. Écrire les deux équations différentielles vérifiées par $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{z}$.
2. En déduire les équations horaires $\boldsymbol{x(t)}$ et $\boldsymbol{z(t)}$en fonction de $\boldsymbol{v_z}$, $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{t}$.
3. Déterminer l'équation $\boldsymbol{z(x)}$ de la trajectoire suivie par le ballonsonde au cours de son ascension et tracer son allure.
4. Exprimer dans la base cartésienne $(\overrightarrow{U_x}, \overrightarrow{U_z})$ les composantes du vecteur accélération du ballon-sonde.

Exercices d'entraînements

□ Exercice 15.3. Basket-Ball ★★ (Coordonnées cartésiennes, trajectoire)

On précise les caractéristiques de la trajectoire d'un objet en mouvement uniformément accéléré. On prend un vecteur accélération $\overrightarrow{a} = g\overrightarrow{u_z}$, avec g une constante positive. Ces trajectoires sont caractéristiques des mouvements dans le champ de pesanteur, en l'absence de frottement.

1. Quel est le système de coordonnées approprié ?

2. L'objet se trouve à l'instant initial à la position $x = 0$, $z = h$ et est animé à cet instant du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0(\cos(\alpha)\overrightarrow{u_x} + \sin(\alpha)\overrightarrow{u_z})$ avec $\alpha \in [0^\circ ; 90^\circ]$. Établir l'équation de sa trajectoire.

3. **a.** Déterminer l'abscisse x_c pour laquelle $z = 0$ ainsi que l'altitude maximale atteinte, z_s.
b. Comment z_s varie-t-elle avec l'angle α quand v_0 reste fixé ? Avec h ?
c. Dans le cas $h = 0$, pour quelle valeur de α la distance x_c est-elle maximale ?

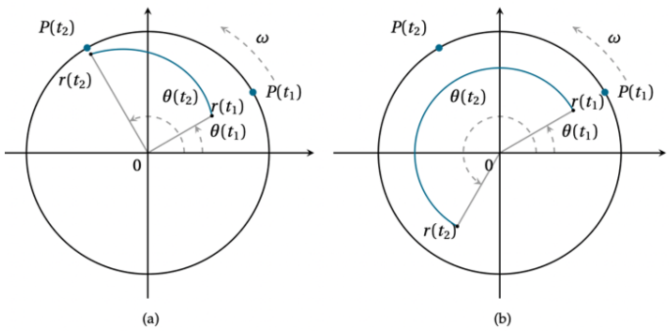
□ Exercice 15.4. Carrousel ★★ (Coordonnées polaires)

On considère un carrousel circulaire de rayon R en rotation autour de son centre O à la vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Un homme assimilé à un point se déplace à sa surface à la vitesse v constante.

1. **a.** L'homme se déplace en suivant un rayon du cercle (Figure 1a). Il se trouve à l'instant initial en O et se dirige dans la direction $\theta = 0$. Déterminer ses coordonnées polaires $r(t)$ et $\theta(t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$.
b. Même question si l'homme se déplace à la vitesse v constante le long d'un cercle de rayon r_0 de centre O, dans le même sens que la rotation du carrousel (figure 1b), avec $\theta = 0$ à l'instant initial.

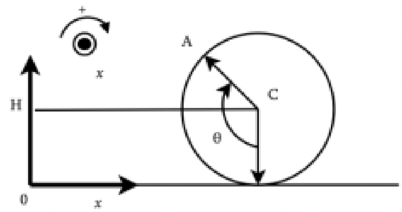
2. Déterminer dans les deux cas précédents le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans $\mathcal{R}$ de l'homme.

3. Déterminer, dans les deux cas précédents la valeur maximale du rayon R pour laquelle la norme de l'accélération reste inférieure à $g = 9,8$ m.s^{-2} si $v = 1,0$ m.s^{-1} et $\omega = 2\pi/5$ rad.s^{-1}.



□ Exercice 15.5. Cycloïde ★★ (Coordonnées polaires, équations horraires)

Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur un axe (Ox). Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle $\theta(t)$ dont on a tourné un rayon de la roue à partir de sa position initiale.



1. Montrer que si la roue ne glisse pas, l'abscisse du centre de la roue x_c est liée à θ par :

$$x_c = x_{c0} + R\dot{\theta}$$

2. Quelles sont en fonction de R et θ les coordonnées (dans le repère cartésien d'origine O) du point A de la périphérie de la roue qui coïncidait pour $\theta = 0$ avec O ?

L'ensemble de ces points constitue par définition une **cycloïde.**

3. Tracer cette courbe.

4. Calculer en fonction de R et de θ et ses dérivées, les composantes de la vitesse et de l'accélération de A.

5. Donner les valeurs des composantes de la vitesse et de l'accélération de A au moment où celui-ci touche l'axe.

□ Exercice 15.6. Trajectoire elliptique d'une comète ★★★ (Coordonnées polaires, trajectoire)

Une comète est un petit corps céleste décrivant une orbite elliptique dont l'un des foyers est le Soleil. La comète est assimilée à un point M, et se déplace dans le plan (xOy) sur une ellipse d'équation polaire :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

où e et p sont des constantes (avec $0 < e < 1$). À $t = 0$, elle est au point P défini par $\theta = 0$, avec une vitesse $\overrightarrow{v_p} = v_p\overrightarrow{u_y}$ (avec $v_p > 0$).

1. Quelles sont les valeurs minimales et maximale de r ? Pour quelles valeurs de θ sont-elles obtenues ?

2. Faire un schéma de la trajectoire. Faire apparaître le point P, le point A le plus éloigné de O, et également le point H d'ordonnée maximale et le point B d'ordonnée minimale. En M quelconque de la trajectoire, faire apparaître la base locale cylindrique.

3. On suppose que l'accélération de M est toujours radiale. En déduire que $r^2\dot{\theta}$ est une constante (qu'on notera C). Déterminer C en fonction de p, e et v_p.

4. Déterminer la vitesse $\overrightarrow{v_A}$ de M au point A.

□ Exercice 15.7. Mouvement d'un avion ★★★ (Coordonnées sphériques)

On étudie le mouvement d'un avion se déplaçant à faible altitude autour de la Terre. On peut alors considérer qu'il évolue à la surface d'une sphère de rayon R_T. Sa position y est repérée par les angles θ et φ des coordonnées sphériques.

1. Son vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport à la Terre est de norme constante.

   (a) Il se déplace du nord vers le sud. Déterminer l'évolution de ses coordonnées sphériques θ et φ.

   (b) Même question s'il se déplace sur un cercle de latitude θ constante, d'est en ouest.

2. Il se déplace maintenant du nord vers le sud et d'est en ouest en gardant toujours le même angle α par rapport à l'axe nord-sud. Comment doit-il ajuster la norme v de son vecteur vitesse en fonction de sa position pour toujours garder le Soleil au zénith ?