Exercices d'applications :

☐ **Exercice 15.1. Freinage d'urgence ★ (Coordonnées cartésiennes, équations horraires)**

Si on observe le mouvement rectiligne de la voiture sur un axe (Ox), en prenant pour origine des dates le début du freinage, sa vitesse est alors donnée par $v_x(t) = \dot{x}(t) = -at + v_0$ et son équation horaire par $x(t) = -at^2/2 + v_0 t + x_0$. Elle s'arrête quand sa vitesse s'annule, soit pour une date t_a telle que :

$$-at_a + v_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_a = \frac{v_0}{a} = 6,0 \text{ s}}$$

Ne pas oublier de convertir la vitesse en m.s^{-1} !
À cette date, son abscisse est donc $x(t_a)$, et la distance de freinage est :

$$d = x(t_a) - x_0 = -\frac{at_a^2}{2} + v_0 t_a \quad \text{soit} \quad \boxed{d = \frac{v_0^2}{2a} = 74 \text{ m}}$$

☐ **Exercice 15.2. Ballon-sonde ★ (Coordonnées cartésiennes, trajectoire)**

1 – En traduisant l'énoncé, on obtient :

$$\vec{v}_{M/(\mathscr{R})} = v_z \vec{u}_z + \frac{z}{\tau}\vec{u}_x = \dot{x}\vec{u}_z + \dot{z}\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \dot{x} = z/\tau \\ \dot{z} = v_z \end{cases}}$$

2 – Par intégration :

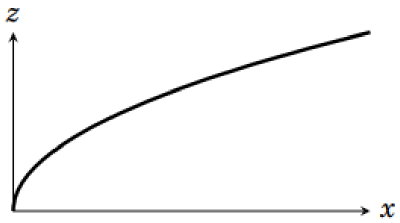
$$\dot{z} = v_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{z(t) = v_z t} \qquad (2.1)$$

où on a utilisé la condition initiale $z(t=0) = 0$. On injecte dans l'équation en x :

$$\dot{x} = v_z \frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{2}\frac{v_z}{\tau}t^2} \qquad (2.2)$$

3 –

$$(2.2) \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x\tau}{v_z}} \quad \overset{(2.1)}{\Rightarrow} \quad \boxed{z(x) = \sqrt{2v_z \tau x}}$$



4 – Par dérivation :

$$\vec{v}_{M/(\mathscr{R})} = v_z \frac{t}{\tau}\vec{u}_x + v_z \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{M/(\mathscr{R})} = \frac{v_z}{\tau}\vec{u}_x}$$

Exercices d'entraînements

☐ **Exercice 15.3. Basket-Ball ★★ (Coordonnées cartésiennes, trajectoire)**

1. Le système possède une direction privilégiée, la direction du vecteur $\vec{a}$. On choisit donc les **coordonnées cartésiennes**.

2. On intègre deux fois par rapport au temps l'équation différentielle $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -g\overrightarrow{u_z}$ pour obtenir :

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad \text{et} \quad z = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

En « faisant disparaître » le paramètre t en l'exprimant grâce à la première équation, on obtient $z(x)$, l'équation de la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_0}\cos\alpha \quad \text{soit} \quad \boxed{z(x) = h + x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2}$$

3. a. On résout tout d'abord l'équation $z = 0$. On obtient :

$$-h = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}x - \frac{2hv_0^2\cos^2\alpha}{g} = 0$$

L'unique racine positive de cette équation du second degré s'écrit :

$$x_c = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)^2 + \frac{2gh}{v_0^2}\cos^2\alpha}\right)$$

Pour établir l'altitude maximale, il est fructueux de transformer l'expression de la trajectoire pour y lire directement ses caractéristiques : il faut faire apparaître le développement du carré d'une somme. On a alors :

$$\begin{aligned} z - h &= x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 \\ &= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(x^2 - \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}x\right) \\ &= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} \end{aligned}$$

soit :

$$z - \left(h + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\right) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2$$

Cette expression est de la forme

$$z_s - z = \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}(x - x_s)^2$$

avec x_s et z_s les coordonnées du sommet de la parabole. L'altitude maximale sera donc :

$$\boxed{z_s = h + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}} \quad \text{atteinte pour} \quad \boxed{x_s = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}}$$

b. L'altitude z_s est évidemment maximale pour une trajectoire verticale, c'est-à-dire avec $\alpha = \pi/2$. On a alors $z_s = h + v_0^2/2g$. Quelque soit l'angle α, l'altitude z_s croît linéairement avec h.

c. Pour $h = 0$, on a $x_c = v_0^2\sin^2\alpha/g$, maximale pour $2\alpha = \pi/2$ soit $\alpha = \pi/4$, où elle vaut $x_c = \dfrac{v_0^2}{g}$.

□ Exercice 15.4. Carrousel ★★ (Coordonnées polaires)

1. a. On a immédiatement $\boxed{r = vt}$. L'homme met le même temps que le carrousel pour effectuer un tour complet autour de O sa vitesse angulaire est donc la même et on a $\boxed{\theta = \omega t}$ comme pour un point fixe du carrousel.

b. On a cette fois-ci $r = r_0$. En un temps Δt, l'homme a tourné de $v\Delta t/r_0$ par rapport au rayon du carrousel sur lequel il se trouvait initialement, qui a lui-même tourné de ωt.
Sa vitesse angulaire est donc $\boxed{\omega + v/r_0}$ et on a $\boxed{\theta = (\omega + v/r_0)t}$.

2. On a toujours $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$

— Dans le premier cas, on a :

$$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_r} + vt\omega\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = -vt\omega^2\overrightarrow{u_r} + 2v\omega\overrightarrow{u_\theta}$$

— Dans le second, on a :

$$\overrightarrow{v} = (v + r_0\omega)\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = -r_0\left(\omega + \frac{v}{r_0}\right)^2\overrightarrow{u_r}$$

3. Dans le premier cas, on exprime la norme a de $\overrightarrow{a}$ en fonction de r : $a = v\omega\sqrt{4 + (\omega t)^2} = v\omega\sqrt{4 + \left(\frac{r\omega}{v}\right)^2}$.

Cette expression est croissante et maximale pour $r = R$, on résout alors $a = g$. On obtient $\boxed{R = 6,0 \text{ m}}$

Dans le second cas, on a directement $a = r_0\left(\omega + \dfrac{v}{r_0}\right)^2$. On résout pour $a = g$ et on obtient $\boxed{r_0 = R = 4,5 \text{ m}}$.

□ Exercice 15.5. Cycloïde ★★ (Coordonnées polaires, équations horraires)

1. Si la roue ne glisse pas, son centre avance à chaque tour d'une longueur égale à son périmètre, soit $2\pi R$. Comme la roue a alors tourné de $\theta = 2\pi$, on a $x_c = x_{c0} + R\theta$. Le choix d'origine du repère assure ici que $x_{c0} = 0$.

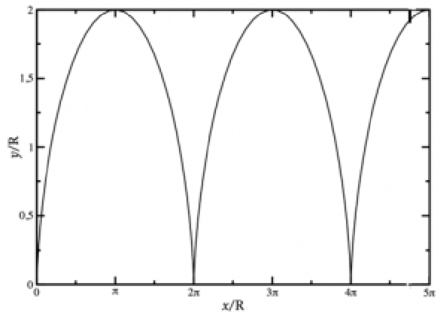
2. On a $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CA}$ avec H le projeté orthogonal de C sur l'axe (Oy). Comme

$$\overrightarrow{CA} = R[-\sin\theta\overrightarrow{u_x} - \cos\theta\overrightarrow{u_y}] \quad , \quad \overrightarrow{HC} = x_c\overrightarrow{u_x} = R\theta\overrightarrow{u_x} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OH} = R\overrightarrow{u_y},$$

on obtient alors :

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = R[(1-\cos\theta)\overrightarrow{u_y} + (\theta - \sin\theta)\overrightarrow{u_x}]}$$

3. La courbe de la cycloïde est donnée ci-dessous.



4. On en déduit les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans le référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ sont fixes :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{u_y} + R\dot{\theta}(1-\cos\theta)\overrightarrow{u_x}}$$

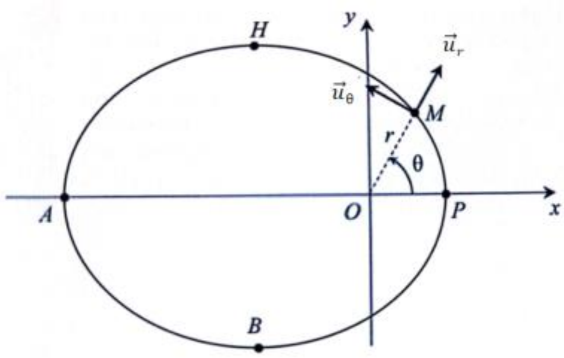
$$\boxed{\overrightarrow{a} = R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\overrightarrow{u_y} + R[\ddot{\theta}(1-\cos\theta) + \dot{\theta}^2\sin\theta]\overrightarrow{u_x}}$$

5. Lorsque le point A repasse en $\theta = 0[2\pi]$, c'est-à-dire au contact avec le sol, on a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{a} = R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_y}$. La vitesse coïncide alors avec la vitesse du point du sol à l'instant du contact : on dit qu'il y a roulement sans glissement.

□ Exercice 15.6. Trajectoire elliptique d'une comète ★★★ (Coordonnées polaires, trajectoire)

1. La valeur maximale de r est $\boxed{r_{\max} = \dfrac{p}{1-e}}$ obtenue pour $\theta = \pi$; la valeur minimale est $\boxed{r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}}$ correspondant à $\theta = 0$ (c'est donc la valeur de r en P).

2. À titre culturel, pour une trajectoire elliptique quelconque, le point A est appelé aphélie, et le point P périhélie.



3. Dans la base polaire, l'accélération s'écrit :

$$\overrightarrow{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$$

Le fait que cette accélération soit radiale entraîne qu'à chaque instant, $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$. Pour montrer que $r^2\dot{\theta}$ est une constante, calculons sa dérivée :

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = r^2\ddot{\theta} + 2\dot{r}r\dot{\theta} = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

Sa dérivée est bien nulle ce qui justifie que $\boxed{r^2\dot{\theta} = C}$.
Initialement : $r_0 = r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$ (avec $\dot{r}(t=0) = 0$), alors :

$$\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} = \vec{0} + r_{\min}\dot{\theta}_0\vec{u_\theta} = v_p\vec{u_y}$$

Ainsi :

$$\dot{\theta}_0 = \frac{v_p}{r_{\min}}$$

On en déduit :

$$\boxed{C = r_{\min}v_p = \frac{p}{1+e}v_p}$$

Aux points A et P, $\dot{r} = 0$ et donc $v_A = r_A\dot{\theta}_A$ et $v_p = r_p\dot{\theta}_p$, soit :

$$\frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_p} = \frac{r_p v_A}{r_A v_p}$$

Par ailleurs, la loi $r^2\dot{\theta} = C$ en A et P donne :

$$\frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_p} = \left(\frac{r_p}{r_A}\right)^2$$

Par identification, on trouve alors :

$$r_A v_A = r_p v_p \quad \text{soit} \quad \boxed{v_A = \frac{1-e}{1+e}v_p}$$

□ Exercice 15.7. Mouvement d'un avion ★★★ (Coordonnées sphériques)

1. (a) Pour un mouvement du nord vers le sud, l'angle φ reste constant. Il décrit un cercle de rayon R_T à la vitesse v uniforme. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v}{R_T}$.

   (b) C'est désormais l'angle θ qui est constant et φ qui varie. Par ailleurs, le cercle décrit a pour rayon $R_T \sin(\theta)$. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v}{R_T \sin(\theta)}$.

2. Pour un mouvement à la surface d'une sphère, les composantes sphériques du vecteur vitesse sont :

$$v_\theta = R_T\dot{\theta} \qquad v_\varphi = R_T \sin(\theta)\dot{\varphi}.$$

   Les informations sur la direction du vecteur vitesse assurent que $v_\theta \geqslant 0$ et $|v_\varphi/v_\theta| = \tan(\alpha)$. Dans le référentiel de la Terre, le Soleil décrit une révolution en $T = 24\,\mathrm{h}$, d'est en ouest, ce qui correspond à une vitesse angulaire $\dot{\varphi} = -\frac{2\pi}{T}$. L'avion doit avoir la même vitesse angulaire pour suivre le Soleil. On a donc :

$$v = \sqrt{v_\theta^2 + v_\varphi^2} = |v_\varphi|\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)}} = \frac{2\pi R_T \sin(\theta)}{T}\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)}}.$$

   On vérifie que la norme v est bien maximale quand il croise l'équateur, c'est-à-dire pour $\theta = \pi/2$.