

DS N°5 Filtrage et interférences (3h30)**Exercice n°1 : Etude d'un filtre simple**

On considère dans ce sujet le circuit ci-dessous, dans lequel les résistances ont la même valeur R et le condensateur la capacité C .

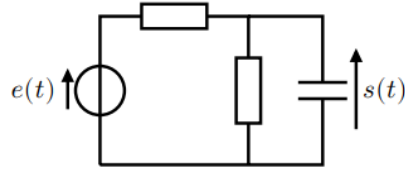


Figure 1 : Circuit simple

1 – Montrer par des circuits équivalents qu'il s'agit d'un passe-bas.

2 – Exprimer la fonction de transfert. On identifiera la pulsation de coupure.

$$\underline{H} = \frac{1/2}{1 + j \frac{RC\omega}{2}}$$

3 – Quelle est la pente de coupure à haute fréquence dans le diagramme de Bode ?

À haute fréquence

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{jRC\omega}$$

donc -20

4 – Comment choisir RC pour moyenner un signal d'entrée de fréquence 1 kHz ?

Il faut couper toutes les fréquences sauf la nulle, donc

$$2/RC/2\pi \ll 1 \text{ kHz} \Rightarrow RC \gg 3,14 \text{ kHz}$$

ce qui n'est pas évident avec des composants usuels (C a souvent une valeur très faible).

Exercice n°2 : Microphone de guitare électrique**Partie 1 : Modèle électrique d'un microphone**

Ce problème s'intéresse à quelques aspects de la captation du son par un micro de guitare électrique.

Une guitare électrique est souvent munie de plusieurs micros. On peut les activer séparément grâce à un commutateur. On pince une corde de longueur 67 cm d'une guitare de façon à produire une onde (stationnaire, de vibration verticale et de faible amplitude). La figure 2 présente le spectre du son capté par un micro placé à 16 cm ou à 4 cm du point d'attache de la corde.

5 – En vous appuyant sur ces spectres, indiquer quel micro sonne plus aigu.

On constate que le spectre du micro placé à 4 cm du chevalet contient des harmoniques de rang élevé (hautes fréquences) plus importants, il va donc globalement sonner plus aigu (son « métallique ») que celui placé à 16 cm (son plus « rond »).

D'un point de vue électrique, le micro se modélise de la façon représentée à la figure 3

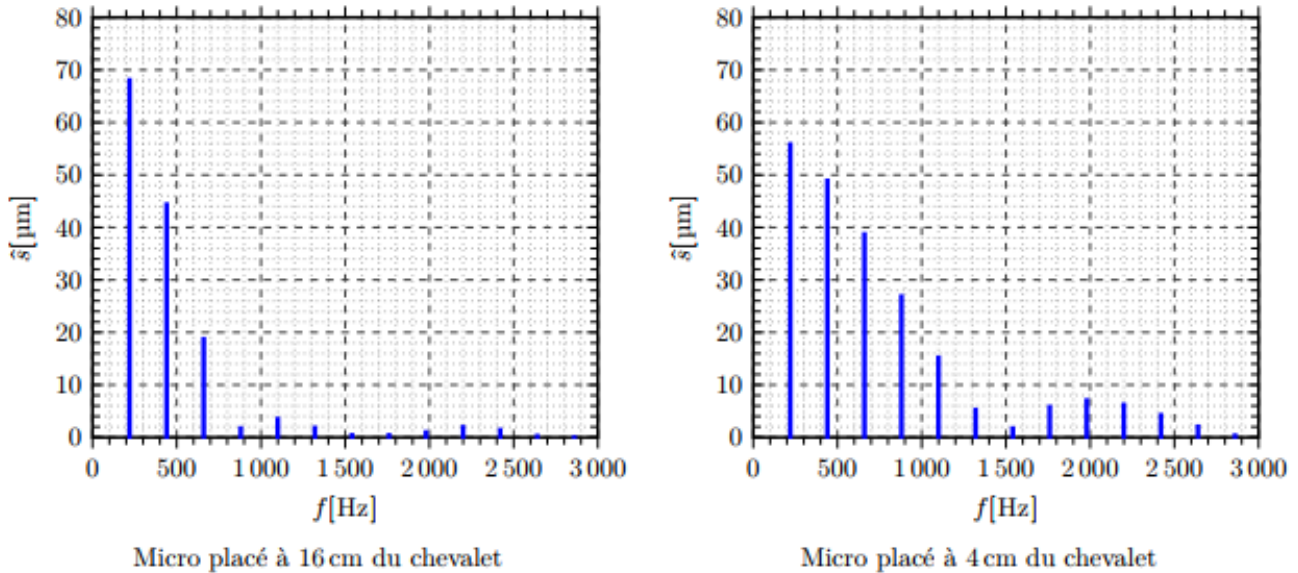


Figure 2 : Spectres des signaux reçus par les micros

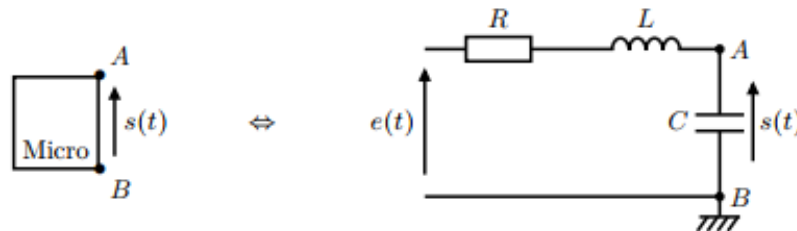
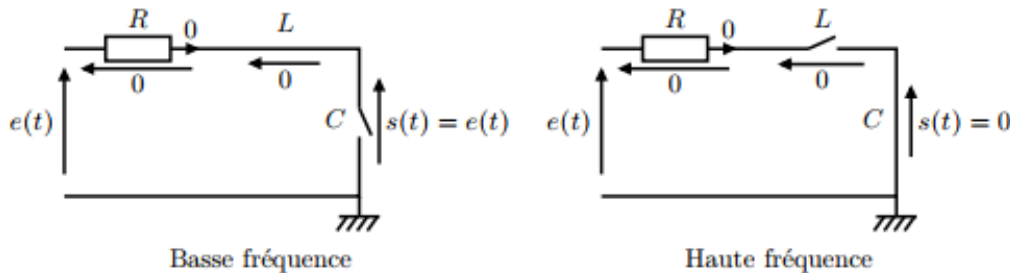


Figure 3 : Modèle équivalent au micro

où $e(t)$ représente la force électromotrice induite par le mouvement de la corde (ce n'est donc pas un générateur mais un reflet des spectres donnés plus haut). L désigne l'inductance propre du bobinage et R sa résistance. De plus, le grand nombre de spires présentes dans le bobinage provoque un effet capacitif représenté par le condensateur C .

6 – Étudier le comportement asymptotique de ce circuit. En déduire le type de filtrage réalisé par le micro.

On dessine les circuits équivalents BF et HF :



On en déduit un filtre passe-bas.

7 – Donner l'expression de la fonction de transfert du micro en régime sinusoïdal forcé $\underline{H} = \underline{s}/\underline{e}$ sous la forme canonique. Identifier les paramètres canoniques.

Pont diviseur de tension :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega} \Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}}$$

On identifie donc $\underline{H}_0 = 1$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = 1/R\sqrt{L/C}$.

8 – Montrer que, si $Q > 1/\sqrt{2}$, il y a résonance à une pulsation ω_r à déterminer.

Il y a résonance s'il existe une pulsation ω_r telle que

$$|H_0| = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\frac{\omega}{Q\omega_0})^2}}$$

admette un maximum, donc

$$f : \omega \mapsto \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2$$

admette un minimum.

$$\frac{df}{d\omega} = -2\frac{2\omega}{\omega_0^2} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + \frac{2\omega}{\omega_0^2 Q^2} = -4\frac{\omega}{\omega_0^2} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{1}{2Q^2}\right)$$

donc

$$\frac{df}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_r^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$$

qui admet une solution réelle si

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

9 – Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude dans le cas $Q > 1/\sqrt{2}$. On détaillera les comportements asymptotiques.

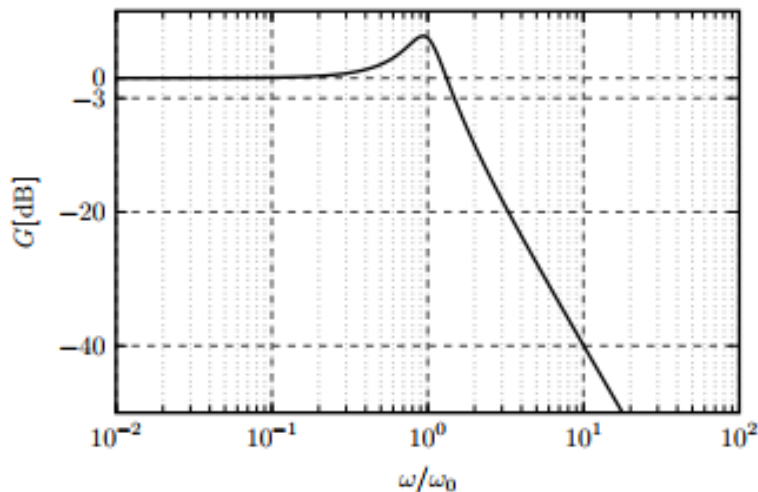
Limite basse fréquence

$$\underline{H}_0 \simeq 1 \Rightarrow G_{dB} = 0$$

Limite haute fréquence

$$\underline{H}_0 \simeq -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow G_{dB} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

d'où l'allure



10 – Expliquer comment tracer expérimentalement un diagramme de Bode.

On branche un GBF à l'entrée du filtre, et un oscilloscope en sortie. On envoie un signal sinusoïdal et pour chaque fréquence, on mesure les amplitudes d'entrée et de sortie, ce qui permet de mesurer $G(f)$.

11 – Dans le cas précis du micro de guitare, expliquer pourquoi il n'est pas possible de tracer expérimentalement le diagramme de Bode.

Ici, l'entrée du « filtre » est le résultat du déplacement de la corde, donc on ne peut pas y brancher une source contrôlée.

12 – Un potentiomètre de résistance r est traditionnellement ajouté en parallèle du micro (donc en parallèle de la capacité C sur le schéma équivalent). Donner l'expression littérale du nouveau gain statique du circuit en présence de ce potentiomètre. Ce dernier est accessible pour le guitariste. Quelle est son utilité ?

Avec un circuit équivalent, on montre par pont diviseur que

$$\underline{H}'_0 = \frac{r}{r+R}$$

En faisant varier r librement entre 0 et sa valeur maximale, le guitariste peut contrôler le volume qui sort du micro.

On souhaite mesurer les paramètres R , L et C de deux micros différents : le micro **Fender Lace Sensor** et le micro **De Armond Dynasonic**. En l'absence de vibration de la corde, le micro est modélisé par le dipôle, d'impédance \underline{Z} , représenté à la figure 4 gauche.

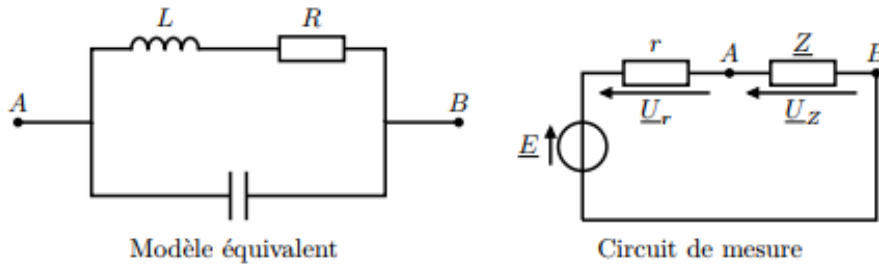


Figure 4 : Détermination du modèle équivalent

On réalise le montage de la figure 4 à droite, dans lequel e est une source de tension idéale, délivrant une tension sinusoïdale de la forme : $e(t) = E \cos(\omega t)$, et r est un résistor de résistance $r = 10 \text{ k}\Omega$.

13 – Exprimer \underline{Z} , l'impédance du micro orienté en convention récepteur, en fonction de R , L , C et ω . Montrer qu'elle s'écrit en fonction des paramètres obtenus précédemment :

$$\underline{Z} = R \frac{1 + jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + jQ \frac{\omega}{\omega_0}}$$

On calcule à partir du circuit équivalent

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{jC\omega(R + jL\omega) + 1}{R + jL\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}$$

soit

$$\underline{Z} = R \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = R \frac{1 + jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + jQ \frac{\omega}{\omega_0}}$$

14 – Montrer que dans cette expérience, $\underline{Z} = r \underline{U}_Z / \underline{U}_r$.

À l'aide de deux ponts diviseurs en complexe,

$$\begin{cases} \underline{U}_r / \underline{E} = r / (r + \underline{Z}) \\ \underline{U}_Z / \underline{E} = \underline{Z} / (r + \underline{Z}) \end{cases} \Rightarrow \underline{Z} = r \frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r}$$

Le graphe de la figure ?? représente $|\underline{U}_Z| / |\underline{U}_r|$ en fonction de la pulsation ω pour les deux micros étudiés : trait plein pour le micro **Fender** et pointillés pour micro **Dynasonic**.

Dans les questions qui exploitent ce graphe, on donnera explicitement les valeurs numériques que l'on a lues et que l'on utilise ensuite.

15 – Montrer qu'en basses fréquences $\underline{Z} \simeq R$ et en déduire la valeur de R pour chaque micro.

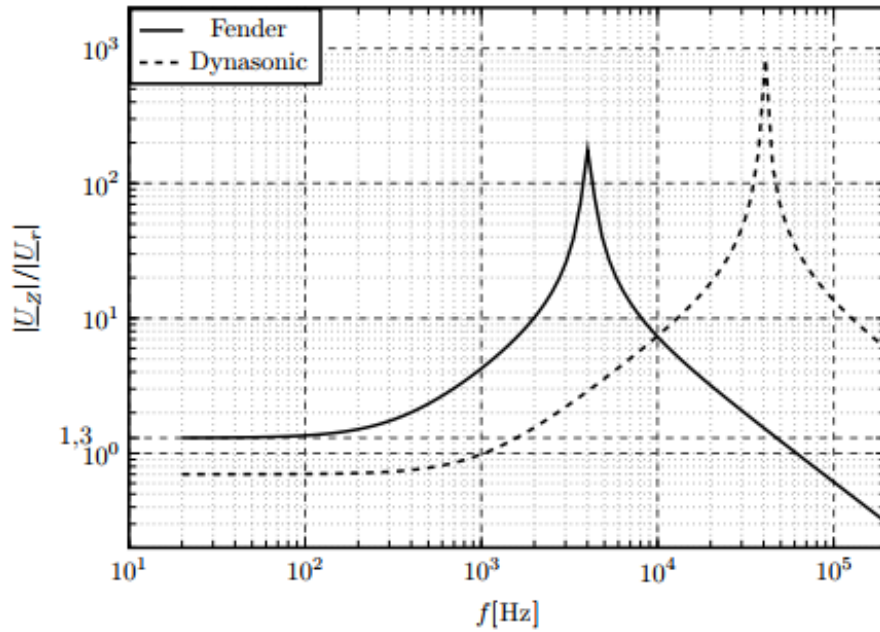


Figure 5 : Mesures

En basses fréquences, $\omega \ll \omega_0$ donc

$$\underline{Z} = R \frac{1 + jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} \simeq R$$

En exploitant la courbe dans la limite basse fréquence, on obtient, pour le micro Fender :

$$\frac{|\underline{Z}|}{r} (\omega \ll \omega_0) = 1,3 \Rightarrow \underline{R_{\text{Fender}}} = 13 \text{ k}\Omega$$

et pour le Dynasonic :

$$\frac{|\underline{Z}|}{r} (\omega \ll \omega_0) = 0,7 \Rightarrow \underline{R_{\text{Dyn}}} = 7 \text{ k}\Omega$$

16 – Les relevés expérimentaux mettent en évidence que pour des fréquences de l'ordre de 1 kHz, les effets capacitifs sont négligeables dans \underline{Z} . Montrer que pour ces fréquences

$$L \simeq \frac{1}{\omega} \sqrt{r^2 \left| \frac{U_Z}{U_r} \right|^2 - R^2}$$

En déduire la valeur de L pour chaque micro.

Si on néglige les effets capacitifs,

$$\underline{Z} \simeq R + jL\omega \Rightarrow r \left| \frac{U_Z}{U_r} \right| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \Rightarrow \boxed{L \simeq \frac{1}{\omega} \sqrt{r^2 \left| \frac{U_Z}{U_r} \right|^2 - R^2}}$$

En exploitant la courbe autour de 1 kHz, on lit pour le Fender

$$\left| \frac{U_Z}{U_r} \right| \simeq 4 \Rightarrow \underline{L_{\text{Fender}}} = 6 \text{ H}$$

et pour le Dynasonic

$$\left| \frac{U_Z}{U_r} \right| \simeq 1 \Rightarrow \underline{L_{\text{Dyn}}} = 1,1 \text{ H}$$

Un calcul sur la forme de \underline{Z} obtenue permet de montrer qu'il y a résonance pour \underline{Z} si $Q > \sqrt{3} - 1$, et que dans ce cas la résonance est d'autant plus aigue que Q est grand et $\omega_{r,\underline{Z}} \simeq \omega_0$ si $Q \gg 1$.

17 – Expliquer comment déterminer C à partir des relevés et en déduire les valeurs numériques de C .

Dans le cas $\omega \simeq \omega_0$ et $Q \gg 1$, on peut écrire

$$Z \simeq RQ^2$$

a niveau du pic de résonance. On peut donc déterminer C par deux méthodes : soit à partir de la fréquence de résonance :

$$f_{r,\text{Fender}} = 4000 \text{ Hz} \Rightarrow \boxed{C_{\text{Fender}} = \frac{1}{4\pi^2 f_r L}} = \underline{0,26 \text{ nF}}$$

et

$$f_{r,\text{Dyn.}} = 40000 \text{ Hz} \Rightarrow \underline{C_{\text{Dyn.}} = 0,014 \text{ nF}}$$

soit à partir de la hauteur du pic de résonance :

$$\frac{|Z|}{r}(\omega_r) = \frac{R}{r} Q^2 = \frac{L}{rRC} \Rightarrow \boxed{C = \frac{L}{rR|U_Z/U_r|}}$$

d'où par lecture pour le Fender

$$\left| \frac{U_Z}{U_r} \right|(\omega_r) = 200 \Rightarrow \underline{C_{\text{Fender}} = 0,23 \text{ nF}}$$

et pour le Dynasonic

$$\left| \frac{U_Z}{U_r} \right|(\omega_r) = 800 \Rightarrow \underline{C_{\text{Dyn.}} = 0,020 \text{ nF}}$$

On constate que les deux méthodes donnent des résultats raisonnablement proches. De façon plus quantitative, si on recalcule la fréquence propre avec les paramètres obtenus ici, on obtient 4300 Hz et 34000 Hz, ce qui semble quand même surprenant car ce serait graphiquement distinguable.

18 – Justifier, à partir des mesures expérimentales, l'affirmation suivante : « Le micro Fender sonne plus aigu que le micro Dynasonic ».

On constate avec les ordres de grandeurs obtenus que $Q \gg 1$, donc la résonance du passe-bas se comporte de façon proche de celle du passe-bande, avec un gain amplifié fortement dans la bande passante et égal à 1 en-dessous. On peut donc en déduire pour la fonction de transfert :

$$f_{0,\text{Fender}} = 4000 \text{ Hz} , \quad Q_{\text{Fender}} = \sqrt{200} \simeq 14 \Rightarrow \Delta f_{\text{Fender}} = \frac{f_0}{Q} = 283 \text{ Hz}$$

et

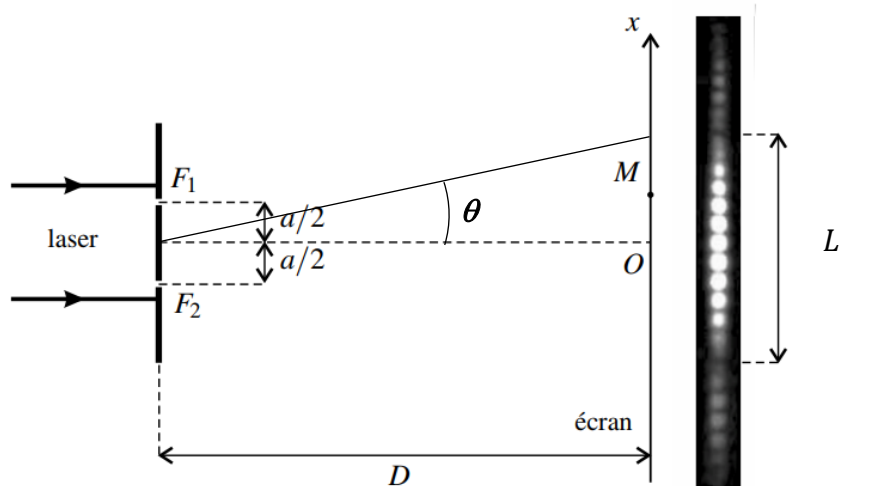
$$f_{0,\text{Dyn.}} = 40000 \text{ Hz} , \quad Q_{\text{Dyn.}} = \sqrt{800} \simeq 28 \Rightarrow \Delta f_{\text{Dyn.}} = \frac{f_0}{Q} = 1400 \text{ Hz}$$

On constate donc que la bande de fréquences dans laquelle le Fender amplifie le signal est la bande 3700 – 4300 Hz, qui constitue des fréquences audibles et aiguës, tandis que le Dynasonic amplifie la bande 39000 – 41000 Hz, qui n'est pas audible. Ainsi, le Fender sonne plus aigu (on peut ajouter que le Dynasonic a une réponse plus fidèle sur l'ensemble de la plage de fréquences audible).

Exercice n°3 : Les fentes d'Young

L'expérience des fentes d'Young est une expérience classique permettant d'observer le phénomène d'interférences lumineuses. Le dispositif comprend un écran opaque percé de deux fentes identiques de très petite largeur $\varepsilon = 0,070 \text{ mm}$, parallèles entre elles et distantes de $a = 0,40 \text{ mm}$.

On envoie un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$ sur les fentes et on place un écran d'observation à distance $D = 1,5 \text{ m}$ derrière le dispositif (voir la figure sur laquelle les échelles ne sont, bien sûr, pas respectées). L'expérience est réalisée dans l'air d'indice optique $n = 1$.



Sur l'écran, on observe une figure symétrique autour d'un point O , la lumière se répartissant le long d'un axe (Ox) perpendiculaire aux fentes. On observe une tache centrale très lumineuse de largeur L dont l'éclairement est modulé et des taches latérales, deux fois plus étroites et beaucoup moins lumineuses présentant la même modulation de l'éclairement (voir figure). Le but de l'exercice est d'interpréter ces observations.

19 - Donner le nom du phénomène responsable de la tâche centrale sur l'écran d'observation.

Il s'agit du phénomène de diffraction.

20 - Un calcul hors programme donne $\theta = \frac{\lambda}{\varepsilon}$, avec θ le demi-angle formé par la tâche centrale.

Exprimer puis calculer la largeur L de la tâche centrale. (On fera l'approximation des petits angles).

Dans le triangle rectangle, on exprime $\tan(\theta)$:

$$\tan(\theta) \approx \theta = \frac{L}{2D}$$

$$L = 2D\theta = 2D \frac{\lambda}{\varepsilon}$$

$$\text{AN: } L = \frac{2 \times 1,5 \times 633 \times 10^{-9}}{0,070 \times 10^{-3}} = 2,7 \times 10^{-2} \text{ m}$$

21 - Ecrire l'expression mathématique des signaux $s_1(M, t)$ et $s_2(M, t)$ émis respectivement par les sources F_1 et F_2 et reçus au point M . (Les phases à l'origine sont choisies nulles.)

$$s_1(M, t) = A \cos(\omega t - k F_1 M) \quad \text{et} \quad s_2(M, t) = A \cos(\omega t - k F_2 M)$$

22 - Donner la définition du chemin optique (AB) entre deux points A et B . Exprimer la différence de marche δ entre les rayons reçus au point M émis par les sources F_1 et F_2 en fonction de (F_1M) et (F_2M) .

$$(AB) = n \times AB$$

$$\delta(M) = (F_1M) - (F_2M)$$

23 - En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que :

$$F_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} \quad \text{et} \quad F_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2}$$

En déduire une expression de δ .

Cf cours.

$$\delta(M) = n \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} - n \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2}$$

24 - En réalisant le développement limité ($\sqrt{1+X} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + \frac{1}{2}X$), montrer que $\delta(M) \approx \frac{ax}{D}$.

$$\delta(M) \approx nD \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D} \right)^2 \right) - nD \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D} \right)^2 \right)$$

$$\delta(M) \approx nD \left(1 + \frac{x^2 + ax + \frac{a^2}{4}}{2D^2} \right) - nD \left(1 + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4}}{2D^2} \right) \Leftrightarrow \delta(M) \approx \frac{nax}{D}$$

25 - A partir des résultats des questions **21** et **24**, montrer que le déphasage $\Delta\Phi(M)$ entre les deux signaux arrivant en M s'exprime :

$$\Delta\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax}{D}$$

$$\Delta\Phi(M) = \Phi_2 - \Phi_1 = (\omega t - k F_2M) - (\omega t - k F_1M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax}{D}$$

26 - On donne la formule de Fresnel dans le cas où les intensités des signaux reçus en M sont différents :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\Phi(M))$$

Exprimer l'intensité reçue $I(M)$ en fonction du déphasage $\Delta\Phi(M)$ et de I_0 dans le cas où les intensités lumineuses des deux ondes sont égales : $I_1 = I_2 = I_0$.

$$I(M) = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} \cos(\Delta\Phi(M)) = 2I_0(1 + \cos(\Delta\Phi(M)))$$

27 - A partir des résultats des questions **25** et **26**, Déterminer l'expression de la périodicité des franges sur l'écran appelé interfrange i .

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax}{D}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{i} \times x\right) \Leftrightarrow i = \frac{\lambda D}{a}$$

28 - Trouver les coordonnées des points du champ d'interférences pour lesquelles il y a interférences constructives et destructives.

Les interférences sont constructives en M , si l'intensité lumineuse $I(M)$ est maximale :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax_p}{D}\right) = +1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax_p}{D} = 2\pi \times p \Leftrightarrow x_p = p \times \frac{\lambda D}{a} = p \times i, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}$$

Les interférences sont destructives en M , si l'intensité lumineuse $I(M)$ est minimale :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax_p}{D}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{ax_p}{D} = (2p+1)\pi \Leftrightarrow x_p = p \times \frac{\lambda D}{a} = \left(p + \frac{1}{2}\right) \times i, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}$$

29 - Exprimer puis calculer le nombre de franges lumineuses N dans la tâche centrale. Comparer le résultat avec à la photographie de l'écran ci-dessus.

$$N = \frac{L}{i} = \frac{2D \frac{\lambda}{\varepsilon}}{\frac{\lambda D}{a}} = \frac{2a}{\varepsilon}$$

$$AN: N = \frac{2 \times 0,40 \times 10^{-3}}{0,070 \times 10^{-3}} = 11$$

Le résultat est compatible avec les observations sur l'écran.

30 - Bonus : On considère que les intensités lumineuses des signaux reçus au point M sont différentes,

Exprimer le facteur de contraste de la figure d'interférences $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ en fonction des intensités des deux signaux I_1 et I_2 . Vérifier que le contraste est bien compris entre 0 et 1.

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{ et } I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2I_1 + 2I_2} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

$$I_1 = I_2 = I_0 \Rightarrow C = 1$$

$$I_1 = 0 \text{ ou } I_2 = 0 \Rightarrow C = 0$$