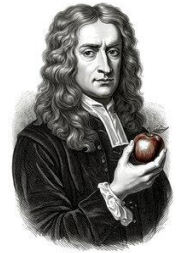


Introduction

En 1687, Isaac Newton publie les **Principia Mathematica**, ouvrage fondateur de la physique moderne.

Pour la première fois, les mouvements des corps terrestres et célestes y sont décrits par les mêmes **lois mathématiques**.

Newton y établit les trois lois de la dynamique ainsi que la loi de la gravitation universelle, unifiant la chute des corps, le mouvement des projectiles et celui des planètes.



Isaac Newton
(1642-1727)

Complément : vidéo historique de la théorie de la gravitation réalisée par ScienceEtonnante :
Du canon à la Lune : la découverte de la gravité. (lien : https://www.youtube.com/watch?v=lnEdBE7d_h0)

I] Les Lois de la dynamique et l'interaction gravitationnelle

1. 1^{ère} loi de Newton : principe d'inertie
 - a. Système isolé et pseudo-isolé

Un système est **isolé** s'il n'est soumis à **aucune force extérieure**.

Un système est **pseudo-isolé** s'il est soumis à **des forces extérieures qui se compensent**.

- b. Enoncé de la 1^{ère} loi de Newton (principe d'inertie)

1^{ère} loi de Newton : Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens, dans lesquels le mouvement d'un système isolé ou pseudo-isolé est rectiligne uniforme.

Remarque : Par conséquent, tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

- c. Exemples de référentiels supposés galiléens

- Le **référentiel terrestre** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de **durées faibles devant 24 h** et sur des **distances faibles devant le rayon de la Terre**. Il sera utilisé pour étudier le mouvement d'objets à la surface (ou à proximité) de la Terre.
- Le **référentiel géocentrique** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de **durées faibles devant 1 année**. Il sera utilisé pour étudier le mouvement des satellites autour de la Terre. Le phénomène des marées s'explique par la nature non galiléenne du référentiel géocentrique.
- Le **référentiel héliocentrique** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durées allant jusqu'à plusieurs millions d'années.

2. 2^{ème} loi de Newton : Principe Fondamental de la Dynamique
 - a. Centre d'inertie

On définit le centre d'inertie (ou barycentre) **G** d'un système de points $S = \{M_i(m_i)\}_{i \in [1,n]}$ par :

$$\forall \text{ le point origine du repère } O : \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

b. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement $\overrightarrow{p(M/\mathcal{R})}$ d'un point matériel **M** de masse **m** animé d'une vitesse $\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}$ dans le référentiel \mathcal{R} est définie par :

$$\overrightarrow{p(M/\mathcal{R})} = m\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}$$

La norme $\|\overrightarrow{p}\|$ de la quantité de mouvement s'exprime en **kg.m.s⁻¹**.

Remarque : Pour un système de points $S = \{M_i(m_i)\}_{i \in [1,n]}$ dans un référentiel \mathcal{R} , la quantité de mouvement est la somme des quantités de mouvement de chaque point :

$$\overrightarrow{p(S/\mathcal{R})} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p(M_i/\mathcal{R})} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{v(M_i/\mathcal{R})}$$

De plus, la quantité de mouvement d'un système de point $\overrightarrow{p(S/\mathcal{R})}$ peut s'exprimer en fonction de la masse totale m_{tot} et de la vitesse du centre d'inertie $\overrightarrow{v(G/\mathcal{R})}$.

$$\overrightarrow{p(S/\mathcal{R})} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d(m_i \overrightarrow{OM_i})}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

$$\overrightarrow{p(S/\mathcal{R})} = m_{tot} \overrightarrow{v(G/\mathcal{R})}$$

c. Principe fondamental de la dynamique

2^{ème} loi de Newton (Principe Fondamental de la dynamique) : La dérivée temporelle de la quantité de mouvement du système de points **S** dans le référentiel \mathcal{R} galiléen est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système.

$$\frac{d\overrightarrow{p(S/\mathcal{R})}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \Leftrightarrow \frac{d(m \times \overrightarrow{v(G/\mathcal{R})})}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

Remarque : Pour un système fermé, de masse constante, le PFD devient :

$$m\overrightarrow{a(G/\mathcal{R})} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

3. 3^{ème} loi de Newton : Principe des actions réciproques

Soient deux corps **A** et **B** en interaction :

- Le corps **A** exerce sur **B** la force $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$.
- Le corps **B** exerce sur **A** la force $\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}}$.



3^{ème} loi de Newton : Les forces $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$ exercée par **A** sur **B** et $\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}}$ exercée par **B** sur **A** sont :

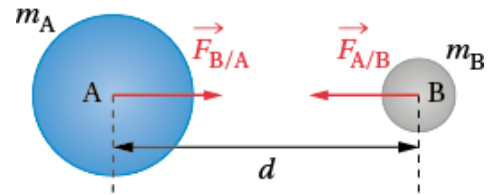
- portées par la droite (**AB**) : $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}} \wedge \overrightarrow{F_{B \rightarrow A}} = \vec{0}$.
- opposées : $\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}} = -\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$.

4. Interaction gravitationnelle et poids

Les corps massifs sont en interaction gravitationnelle.

Le corp de masse m_B , de centre d'inertie **B** subit la force gravitationnelle exercée par le corp de masse m_A et de centre d'inertie **A** :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -G \frac{m_A \times m_B}{d^2} \times \frac{\vec{AB}}{AB}$$



Avec $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, la constante universelle de la gravitation.

Remarque : Lien entre la force gravitationnelle et le poids.

En première approximation, la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet situé à la surface de la Terre est assimilée à son poids. Pour un point **M**, de masse m , situé à la surface de la terre ($R_T = 6,37 \times 10^6 \text{m}$) :

$$\vec{F}_{T \rightarrow M} = -m \times \frac{Gm_T}{R_T^2} \times \frac{\vec{TM}}{TM}$$

De plus, en identifiant la force gravitationnelle exercée par la terre au poids de l'objet :

$$\vec{F}_{T \rightarrow M} = \vec{P} = m \times \vec{g}$$

Le vecteur \vec{g} est opposé au vecteur \vec{TM} , il vient en considérant $m_T = 5,97 \times 10^{24} \text{kg}$:

$$g = \frac{Gm_T}{R_T^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{(6,37 \times 10^6)^2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

II] Mouvement dans un champs de pesanteur uniforme1. Chute libre

Application : Chute libre sans frottement.

On considère le mouvement d'un ballon de football modélisé par un point matériel **M** de masse $m = 400 \text{ g}$, ne subissant que son poids (frottements négligés). On étudie ce système dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On choisit (**Oz**) la verticale ascendante et (**Oxy**) le plan horizontal. A $t = 0$, le ballon est lancé depuis l'origine **O** du repère avec une vitesse initiale \vec{v}_0 contenue dans le plan (**Oxz**) de norme $v_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec (**Ox**).

1) Schématiser la situation.

2) Après avoir définir le système, le référentiel et effectuer le bilan des forces, appliquer la 2^{ème} loi de Newton pour déterminer le vecteur accélération \vec{a} .

3) Par intégration successives, établir les équation horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \\ z(t) = \end{cases}$$

4) Etablir l'équation cartésienne $z(x)$ de la trajectoire.

5) Dessiner l'allure de la trajectoire. Représenter sur cette dernière les vecteurs vitesse et accélération à différents instants.

2. Action d'un fluide

a. Poussé d'Archimède

Enoncé : Tout corps au repos ou en mouvement dans un fluide subit de la part de ce fluide une force égale au poids du volume de fluide déplacé : C'est la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$.

La poussée d'Archimède est opposée au poids du fluide déplacé : $\vec{\Pi}_A = -m_{\text{fluide déplacé}} \times \vec{g}$

Dans le cas où le fluide est **homogène** (corps uniquement dans l'eau, ou dans l'air, et pas entre deux fluides), la poussée d'Archimède s'écrit :

$$\vec{\Pi}_A = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{fluide déplacé}} \times \vec{g}$$

Remarque : Condition de prise en compte de la poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède peut être négligée devant le poids lorsque la masse volumique du fluide est négligeable devant la masse volumique du système. Ainsi :

- La poussée d'Archimède peut être négligée pour un solide plein dans l'air.
- La poussée d'Archimède ne peut pas être négligée, pour un solide vide (par ex. ballon de baudruche) dans l'air ou un solide quelconque dans un liquide.

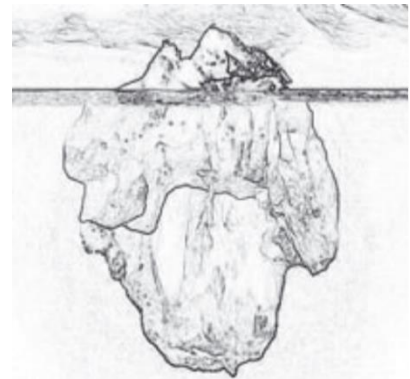
Application : la partie immergée de l'iceberg

On considère un iceberg dont on peut voir un dessin sur la figure ci-contre. La ligne horizontale représente la surface de l'eau.

On note V le volume total de l'iceberg, V_I son volume immergé, $\rho_g = 0,92 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ la masse volumique de la glace et $\rho_L = 1,02 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ celle de l'eau salée.

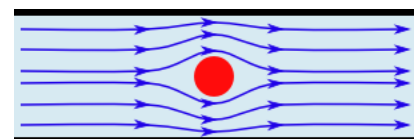
1) Établir les expressions de la poussée d'Archimède et du poids, les forces qui s'appliquent sur l'iceberg.

2) Déterminer la proportion volumique de glace immergée.

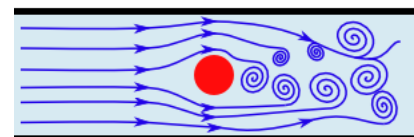


b. Force de frottement fluide

Un corps en mouvement dans un fluide subit **une force de trainée** (ou force de frottement fluide) \vec{f} . La trainée a pour direction celle du mouvement, elle est opposée au mouvement et sa norme est d'autant plus importante que la vitesse du corps est importante.



Régime d'écoulement laminaire



Régime d'écoulement turbulent

Il n'existe pas de « formule théorique » pour exprimer cette force. Cependant, des études expérimentales ont conduit à deux expressions selon le régime d'écoulement autour du fluide :

- En régime laminaire, (vitesses faibles) : $\vec{f} = -\alpha_1 \vec{v}$ avec $\alpha_1 > 0$.
- En régime turbulent, (vitesses importantes) : $\vec{f} = -\alpha_2 \|\vec{v}\| \vec{v}$ avec $\alpha_2 > 0$.

Remarque : les coefficients α_1 et α_2 sont déterminés expérimentalement, ils dépendent du fluide et de l'objet en mouvement.

Application : Chute libre avec frottement.

On s'intéresse à la chute d'un grêlon que l'on considère sphérique de rayon $R = 10 \text{ mm}$ et de masse $m = 3,9 \text{ g}$. Son mouvement est repéré par la position \mathbf{G} de son centre d'inertie.

Étudions l'influence des frottements sur son mouvement dans le champ de pesanteur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on choisit (\mathbf{Oz}) la verticale descendante et (\mathbf{Oxy}) le plan horizontal, le repère (\mathbf{Oxyz}) étant lié au référentiel terrestre.

À $t = 0$, le grêlon a une vitesse nulle $\overrightarrow{v(t=0)} = \vec{0}$, il se trouve à l'origine \mathbf{O} du repère, à une hauteur $h = 1,0 \text{ km}$ du sol.

Sur le site de Météo France, il est indiqué qu'un tel grêlon atteint le sol avec une vitesse de 75 km.h^{-1} .

Partie 1 : Trainée linéaire en la vitesse

Dans un premier temps, considérons un régime d'écoulement laminaire autour du grêlon. La force de frottement fluide s'écrit $\vec{f} = -6\pi\eta R v \vec{U}_z$, avec R le rayon du grêlon et η la viscosité du fluide dans lequel se produit le mouvement, on donne pour l'air : $\eta_{\text{air}} = 1,7 \times 10^{-5} \text{ USI}$.

- 1) Déterminer l'unité SI de η ?
- 2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la composante verticale v_z de la vitesse du grêlon. Qualifier cette équation différentielle. Pour quel système a-t-on déjà rencontré une équation différentielle de ce type ?
- 3) À l'aide de l'équation précédente, exprimer la vitesse limite $v_{\text{lim},1}$ atteinte par \mathbf{M} et la constante de temps caractéristique τ_1 d'évolution de la vitesse.
- 4) Faire les applications numérique pour $v_{\text{lim},1}$ et τ_1 . Commenter les valeurs et les courbes.

Partie 2 : Trainée quadratique en la vitesse

Nous considérons maintenant une modélisation des frottements quadratiques :

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho v^2 S C_x \vec{U}_z$$

- ρ est la masse volumique du fluide dans lequel se produit le mouvement ($\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).
- S est la **surface frontale** du grêlon (**projection orthogonale du volume de l'objet sur un plan perpendiculaire au déplacement**). Dans le cas d'une sphère : $S = \pi R^2$.
- $C_x \in [0 ; 1]$ est le coefficient de traînée adimensionné (Pour un sphère $C_x \approx 0,45$).

5) Vérifier que l'expression du coefficient C_x est bien adimensionné.

6) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la composante verticale v_z de la vitesse du grêlon. Qualifier cette équation différentielle.

7) Sans la résoudre, exprimer puis calculer la vitesse limite $v_{\text{lim},2}$ atteinte par le grêlon. Commenter.

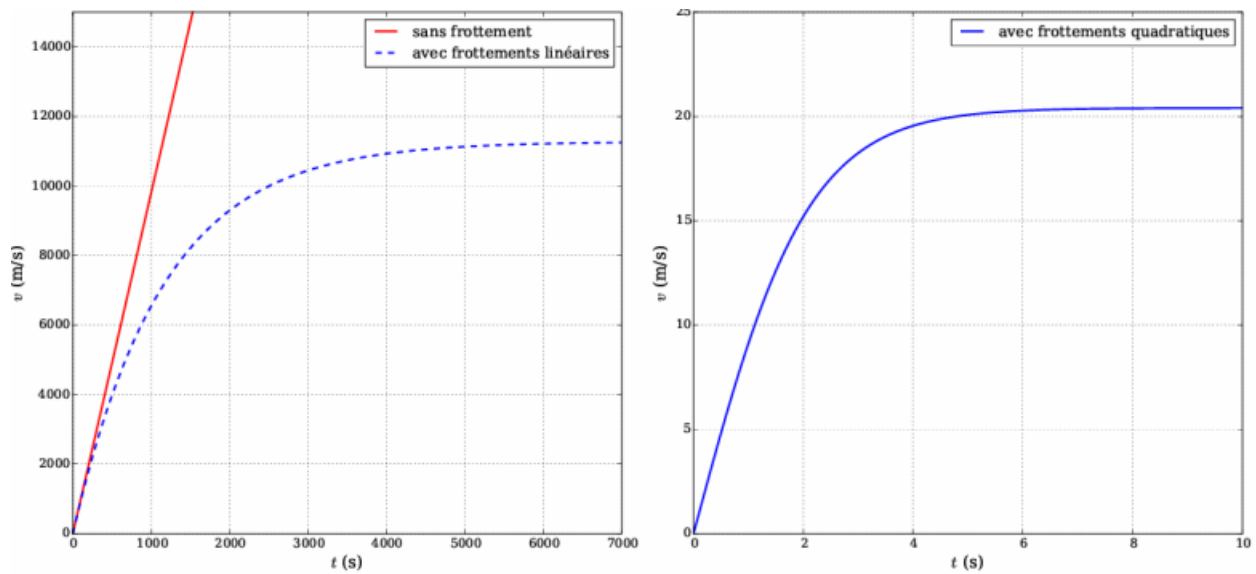
8) Etablir l'équation différentielle adimensionnée, vérifiée par $V^* = \frac{v_z}{v_{\text{lim},2}}$, la mettre sous la forme:

$$\tau_2 \frac{dV^*}{dt} + (V^*)^2 = 1$$

En déduire l'expression et la valeur de la constante de temps τ_2 .

Cette équation différentielle non linéaire peut être résolue numériquement à l'aide de Python.

9) Commenter la courbe $v = f(t)$ obtenue (v est la norme de la vitesse). Quelle durée Δt_2 met le grêlon pour atteindre sa vitesse limite ?



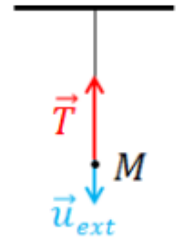
3. Pendule simple

c. Tension d'un fil

La force de tension exercée par un fil tendu sur un objet accroché à une extrémités vaut :

$$\vec{T} = -T\vec{U}_{ext}$$

- \vec{U}_{ext} est le vecteur radial parallèle au fil, orienté vers l'extérieur du fil.
- $T > 0$ est la norme de cette tension.



Remarque : Si le fil n'est pas tendu, la tension est nulle.

d. Mouvement du pendule simple

Application : On considère un pendule simple constitué d'un point **M** de masse **m** accroché à l'extrémité d'un fil inextensible, sans masse et sans rigidité, dont l'autre extrémité **O** est fixe dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire galiléen. On néglige les frottements dus à l'air.

1. Quel est le mouvement du point **M** ? En déduire le système de coordonnées adapté et faire un schéma.
2. Faire le bilan des forces et représenter les forces sur le schéma précédent.
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique.
4. Par une projection du PFD sur un vecteur de la base, Déterminer l'équation du mouvement ?

Dans la suite, on se place dans le cadre des mouvements de faible amplitude ($\theta \ll 1$).

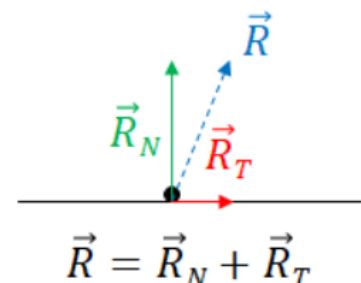
5. Linéariser l'équation différentielle dans ce cas. A quel type de système déjà étudié cette année l'équation différentielle correspond-elle ?
6. La résoudre avec les conditions initiales suivantes : $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$.

4. Mouvement sur un support solide : frottements solides

Quand un objet est au contact avec un support, ce dernier exerce sur l'objet une force appelée réaction du support notée \vec{R} . Cette force est liée à la répulsion des électrons du support et de l'objet (interaction électromagnétique).

La réaction \vec{R} se décompose en deux parties :

- Une composante normale au support notée \vec{R}_N dirigée du support vers le point.
- Une composante tangentielle au support notée \vec{R}_T liée aux frottements solides.



Le sens de \vec{R}_T dépend de la situation envisagée. S'il n'y a pas de frottements dans le problème, $\vec{R}_T = \vec{0}$.

Par contre $\vec{R}_N \neq \vec{0}$ partir du moment où un support existe.

A priori, \vec{R}_N n'a pas d'expression particulière et dépend des autres forces en présence. En revanche, il existe des relations entre \vec{R}_N et \vec{R}_T qui vous seront données dans les énoncés.

Application : Un conducteur d'une voiture de 1200 kg, roulant sur une route horizontale à 90 km.h⁻¹, réalise un arrêt d'urgence. Malheureusement la voiture n'est pas équipée d'un système d'ABS et le conducteur bloque les roues en appuyant sur la pédale de frein.

On note \vec{R}_T et \vec{R}_N les composantes tangentielle et normale de la force de frottement exercée par la route et f le coefficient de frottement solide tel que $f = \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|}$.

On donne $f = 1$ (Sur une route sèche) et $f = 0,5$ (Sur une route mouillée).

1) Calculer la distance d'arrêt sur route sèche et sur une route mouillée.

