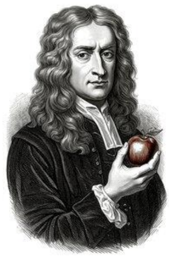
Introduction

En 1687, Isaac Newton publie les **Principia Mathematica**, ouvrage fondateur de la physique moderne.

Pour la première fois, les mouvements des corps terrestres et célestes y sont décrits par les mêmes **lois mathématiques**.

Newton y établit les trois lois de la dynamique ainsi que la loi de la gravitation universelle, unifiant la chute des corps, le mouvement des projectiles et celui des planètes.



Isaac Newton (1642-1727)

Complément : vidéo historique de la théorie de la gravitation réalisée par ScienceEtonnante :
Du canon à la Lune : la découverte de la gravité. (lien : https://www.youtube.com/watch?v=lnEdBE7d_h0)

I] Les Lois de la dynamique et l'interaction gravitationnelle

1. 1ère loi de Newton : principe d'inertie

a. Système isolé et pseudo-isolé

Un système est **isolé** s'il n'est soumis à **aucune force extérieure**.

Un système est **pseudo-isolé** s'il est soumis à **des forces extérieures qui se compensent**.

b. Enoncé de la 1ère loi de Newton (principe d'inertie)

1ère loi de Newton : Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens, dans lesquels le mouvement d'un système isolé ou pseudo-isolé est rectiligne uniforme.

Remarque : Par conséquent, tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

c. Exemples de référentiels supposés galiléens

• Le **référentiel terrestre** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de **durées faibles devant 24 h** et sur des **distances faibles devant le rayon de la Terre**. Il sera utilisé pour étudier le mouvement d'objets à la surface (ou à proximité) de la Terre.

• Le **référentiel géocentrique** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de **durées faibles devant 1 année**. Il sera utilisé pour étudier le mouvement des satellites autour de la Terre. Le phénomène des marées s'explique par la nature non galiléenne du référentiel géocentrique.

• Le **référentiel héliocentrique** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durées allant jusqu'à plusieurs millions d'années.

2. 2ème loi de Newton : Principe Fondamental de la Dynamique

a. Centre d'inertie

On définit le centre d'inertie (ou barycentre) **G** d'un système de points $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{M_i}(\boldsymbol{m_i})\}_{i\in[\mathbf{1},\boldsymbol{n}]}$ par :

$$\forall \text{ le point origine du repère } \boldsymbol{O} : \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\,\overrightarrow{\boldsymbol{OM_i}} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\,\overrightarrow{\boldsymbol{GM_i}} = \vec{\mathbf{0}}$$

b. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement $\overrightarrow{p(M/\mathfrak{R})}$ d'un point matériel **M** de masse **m** animé d'une vitesse $\overrightarrow{v(M/\mathfrak{R})}$ dans le référentiel $\mathfrak{R}$ est définie par :

$$\boxed{\overrightarrow{p(M/\mathfrak{R})} = m\overrightarrow{v(M/\mathfrak{R})}}$$

La norme $\|\vec{p}\|$ de la quantité de mouvement s'exprime en **kg.m.s^{-1}**.

Remarque : Pour un système de points $S = \{M_i(m_i)\}_{i\in[1,n]}$ dans un référentiel $\mathfrak{R}$, la quantité de mouvement est la somme des quantités de mouvement de chaque point :

$$\overrightarrow{p(S/\mathfrak{R})} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p(M_i/\mathfrak{R})} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{v(M_i/\mathfrak{R})}$$

De plus, la quantité de mouvement d'un système de point $\overrightarrow{p(S/\mathfrak{R})}$ peut s'exprimer en fonction de la masse totale m_{tot} et de la vitesse du centre d'inertie $\overrightarrow{v(G/\mathfrak{R})}$.

$$\overrightarrow{p(S/\mathfrak{R})} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\left(m_i\overrightarrow{OM_i}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OM_i} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

$$\boxed{\overrightarrow{p(S/\mathfrak{R})} = m_{tot}\overrightarrow{v(G/\mathfrak{R})}}$$

c. Principe fondamental de la dynamique

<u>2ème loi de Newton (Principe Fondamental de la dynamique) :</u> La dérivée temporelle de la quantité de mouvement du système de points S dans le référentiel $\mathfrak{R}$ galiléen est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système.

$$\frac{d\overrightarrow{p(S/\mathfrak{R})}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \Leftrightarrow \frac{d\left(m\times\overrightarrow{v(G/\mathfrak{R})}\right)}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

Remarque : Pour un système fermé, de masse constante, le PFD devient :

$$\boxed{m\overrightarrow{a(G/\mathfrak{R})} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}}$$

3. <u>3ème loi de Newton : Principe des actions réciproques</u>

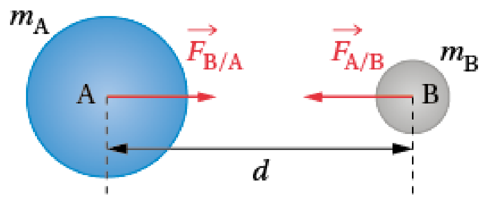
Soient deux corps ***A*** et ***B*** en interaction :

— Le corps ***A*** exerce sur ***B*** la force $\overrightarrow{F_{A\to B}}$.
— Le corps ***B*** exerce sur ***A*** la force $\overrightarrow{F_{B\to A}}$.

<u>3ème loi de Newton :</u> Les forces $\overrightarrow{F_{A\to B}}$ exercée par *A* sur *B* et $\overrightarrow{F_{B\to A}}$ exercée par *B* sur *A* sont :

- **portées par la droite (*AB*) : $\overrightarrow{F_{A\to B}} \wedge \overrightarrow{F_{B\to A}} = \vec{0}$.**
- **opposées : $\overrightarrow{F_{B\to A}} = -\overrightarrow{F_{A\to B}}$.**

4. Interaction gravitationnelle et poids



Les corps massifs sont en interaction gravitationnelle.
Le corp de masse m_B, de centre d'inertie **B** subit la force gravitationnelle exercée par le corp de masse m_A et de centre d'inertie **A** :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{A\to B}} = -G\frac{m_A \times m_B}{d^2} \times \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}}$$

Avec $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$*, la constante universelle de la gravitation.*

Remarque : Lien entre la force gravitationnelle et le poids.

*En première approximation, la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet situé à la surface de la Terre est assimilée à son poids. Pour un point **M,** de masse **m**, situé à la surface de la terre (*$R_T = 6,37 \times 10^6 m$*) :*

$$\overrightarrow{F_{T\to M}} = -m \times \frac{Gm_T}{{R_T}^2} \times \frac{\overrightarrow{TM}}{TM}$$

De plus, en identifiant la force gravitationnelle exercée par la terre au poids de l'objet :

$$\overrightarrow{F_{T\to M}} = \vec{P} = m \times \vec{g}$$

Le vecteur $\vec{g}$ *est opposé au vecteur* $\overrightarrow{TM}$*, il vient en considérant* $m_T = 5,97 \times 10^{24} kg$ *:*

$$g = \frac{Gm_T}{{R_T}^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{(6,37 \times 10^6)^2} = 9,81\ m.s^{-2}$$

II] Mouvement dans un champs de pesanteur uniforme

1. Chute libre

Application : Chute libre sans frottement.

*On considère le mouvement d'un ballon de football modélisé par un point matériel **M** de masse* $m = 400\ g$*, ne subissant que son poids (frottements négligés). On étudie ce système dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On choisit **(Oz)** la verticale ascendante et **(Oxy)** le plan horizontal. A* $t = 0$*, le ballon est lancé depuis l'origine **O** du repère avec une vitesse initiale* $\overrightarrow{v_0}$ *contenue dans le plan **(Oxz)** de norme* $v_0 = 25\ m.s^{-1}$ *et faisant un angle* $\alpha = 30°$ *avec **(Ox)**.*

1) Schématiser la situation.

2) Après avoir définir le système, le référentiel et effectuer le bilan des forces, appliquer la 2ème loi de Newton pour déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$.

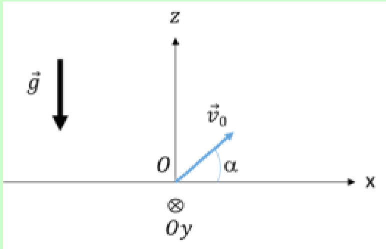
3) Par intégration successives, établir les équation horaires du mouvement : $\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \\ z(t) = \end{cases}$

4) Etablir l'équation cartésienne ***z(x)*** de la trajectoire.

5) Dessiner l'allure de la trajectoire. Représenter sur cette dernière les vecteurs vitesse et accélération à différents instants.

Solution :

1.



2. Principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} \quad \text{soit } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$

Ainsi l'accélération du ballon est constante au cours du temps, orientée suivant $-\vec{u_z}$: $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{u_z}$

3. Équations horaires : on remonte à la trajectoire de la balle en intégrant par rapport au temps et en prenant en compte les conditions initiales sur la position et la vitesse :

$$\boxed{\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}}$$

La vitesse s'obtient par intégration dans le temps :

$$\boxed{\vec{v} = \begin{cases} v_x = A = v_0 \cos\alpha \\ v_y = B = 0 \\ v_z = -gt + C = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}}$$

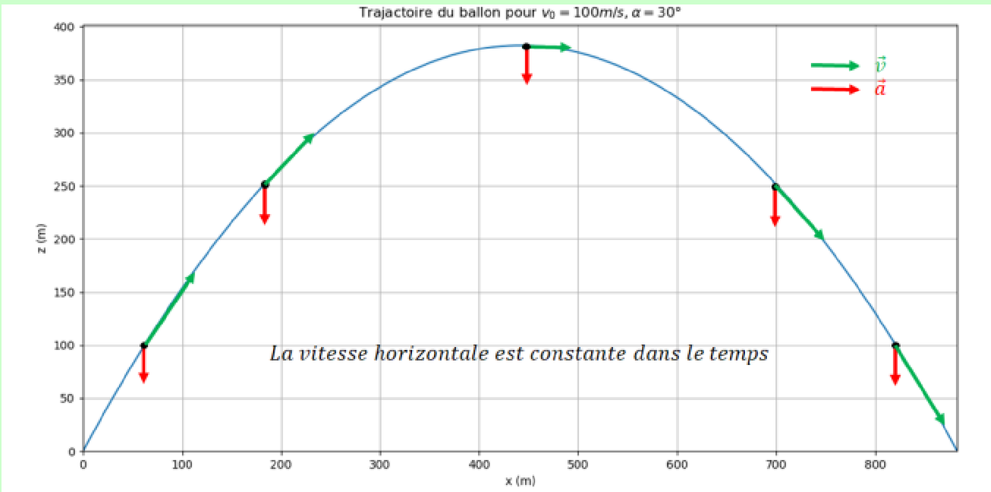
4. Équation de la trajectoire : pour avoir l'équation de la trajectoire z en fonction de x , il suffit de remarquer à partir de $x(t)$ que :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

En injectant cette dernière relation dans l'équation $z(t)$, on obtient :

$$\boxed{z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{(v_0\cos\alpha)^2} + \frac{v_0(\sin\alpha)x}{v_0\cos\alpha} = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{(v_0\cos\alpha)^2} + (\tan\alpha)x}$$

C'est l'équation d'une parabole !



De même en intégrant la vitesse par rapport au temps, on obtient l'évolution du vecteur position (et donc de ses coordonnées) par rapport au temps :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = v_0\,(\cos\alpha)\,t + D = v_0\,(\cos\alpha)\,t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\,(\sin\alpha)\,t \end{cases}}$$

2. Action d'un fluide
    a. Poussé d'Archimède

Enoncé : Tout corps au repos ou en mouvement dans un fluide subit de la part de ce fluide une force égale au poids du volume de fluide déplacé : C'est la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A}$.

La poussée d'Archimède est opposée au poids du fluide déplacé : $\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{fluide\ déplacé} \times \vec{g}$

Dans le cas ou le fluide est **homogène** (corps uniquement dans l'eau, ou dans l'air, et pas entre deux fluides), la poussée d'Archimède s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{fluide} V_{fluide\ déplacé} \times \vec{g}}$$

Remarque : *Condition de prise en compte de la poussée d'Archimède*

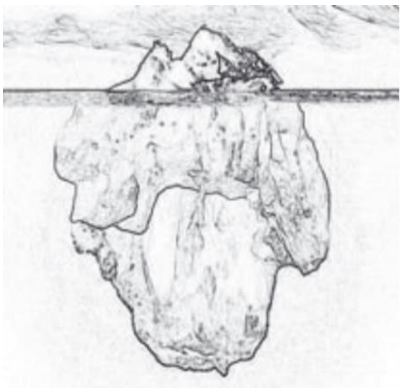
La poussée d'Archimède peut être négligée devant le poids lorsque la masse volumique du fluide est négligeable devant la masse volumique du système. Ainsi :

- ***La poussée d'Archimède peut être négligée** pour un solide plein dans l'air.*

- ***La poussée d'Archimède ne peut pas être négligée**, pour un solide vide (par ex. ballon de baudruche) dans l'air ou un solide quelconque dans un liquide.*

Application : *la partie immergée de l'iceberg*

On considère un iceberg dont on peut voir un dessin sur la figure ci-contre. La ligne horizontale représente la surface de l'eau.



On note ***V*** le volume total de l'iceberg, ***V*I** son volume immergé, $\rho_g = 0,92 \times 10^3\ kg.m^{-3}$ la masse volumique de la glace et $\rho_L = 1,02 \times 10^3\ kg.m^{-3}$ celle de l'eau salée.

1) Établir les expressions de la poussée d'Archimède et du poids, les forces qui s'appliquent sur l'iceberg.

2) Déterminer la proportion volumique de glace immergée.

Solution :

1)

$$P = m \times g = \rho_g V \times g$$

$$\Pi_A = \rho_{fluide} V_{fluide\ déplacé} \times g = \rho_L V_I \times g$$

2) En appliquant le PFD à l'iceberg dans le référentiel terrestre avec $\vec{a} = \vec{0}$:

$$\vec{P} + \overrightarrow{\Pi_A} = \vec{0} \Rightarrow -P + \Pi_A = 0$$
$$\rho_L V_I \times g - \rho_g V \times g = 0$$

$$\rho_L V_I = \rho_g V \Leftrightarrow \frac{V_I}{V} = \frac{\rho_g}{\rho_L}$$

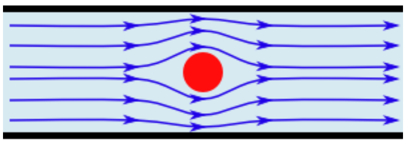
AN :

$$\frac{V_I}{V} = \frac{0,92 \times 10^3}{1,02 \times 10^3} = 0,90$$

La partie immergée de l'iceberg correspond à 90% du volume de ce dernier.

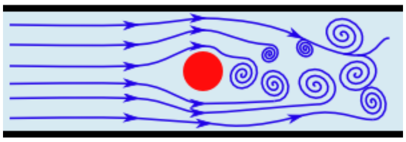
b. Force de frottement fluide

Un corps en mouvement dans un fluide subit **une force de trainée** (ou force de frottement fluide) $\vec{f}$. La trainée a pour direction celle du mouvement, elle est opposée au mouvement et sa norme est d'autant plus importante que la vitesse du corps est importante.



Régime d'écoulement laminaire

Il n'existe pas de « formule théorique » pour exprimer cette force. Cependant, des études expérimentales ont conduit à deux expressions selon le régime d'écoulement autour du fluide :



Régime d'écoulement turbulent

- En régime laminaire, (vitesses faibles) : $\vec{f} = -\alpha_1 \vec{v}$ avec $\alpha_1 > 0$.
- En régime turbulent, (vitesses importantes) : $\vec{f} = -\alpha_2 \|\vec{v}\| \vec{v}$ avec $\alpha_2 > 0$.

Remarque : les coefficients α_1 et α_2 sont déterminés expérimentalement, ils dépendent du fluide et de l'objet en mouvement.

Application : *Chute libre avec frottement.*

*On s'intéresse à la chute d'un grêlon que l'on considère sphérique de rayon **R = 10 mm** et de masse **m = 3,9 g**. Son mouvement est repéré par la position **G** de son centre d'inertie.*

*Etudions l'influence des frottements sur son mouvement dans le champ de pesanteur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on choisit **(Oz)** la verticale descendante et **(Oxy)** le plan horizontal, le repère **(Oxyz)** étant lié au référentiel terrestre.*

*A **t = 0**, le grêlon a une vitesse nulle $\overrightarrow{v(t=0)} = \vec{0}$, il se trouve à l'origine **O** du repère, à une hauteur **h = 1,0 km** du sol.*

*Sur le site de Météo France, il est indiqué qu'un tel grêlon atteint le sol avec une vitesse de **75 km.h⁻¹**.*

Partie 1 : Trainée linéaire en la vitesse

*Dans un premier temps, considérons un régime d'écoulement laminaire autour du grêlon. La force de frottement fluide s'écrit $\vec{f} = -6\pi\eta Rv\overrightarrow{U_z}$, avec **R** le rayon du grêlon et **η** la viscosité du fluide dans lequel se produit le mouvement, on donne pour l'air : $\eta_{air} = 1,7 \times 10^{-5} USI$.*

1) Déterminer l'unité **SI** de η ?

2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la composante verticale v_z de la vitesse du grêlon. Qualifier cette équation différentielle. Pour quel système a-t-on déjà rencontré une équation différentielle de ce type ?

3) A l'aide de l'équation précédente, exprimer la vitesse limite $v_{lim,1}$ atteinte par **M** et la constante de temps caractéristique τ_1 d'évolution de la vitesse.

4) Faire les applications numérique pour $v_{lim,1}$ et τ_1. Commenter les valeurs et les courbes.

Solution :

1. $dim(\eta) = \dfrac{dim(\|\vec{f}\|)}{dim(R) \times dim(v)} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{L.L.T^{-1}} = M.L^{-1}.T^{-1}$. Ainsi, η est en kg.m^{-1}.s^{-1}.

2. Les forces subies par le grêlon sont le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_z}$ et la force de frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$.
Appliquons le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$$

et projettons-le suivant l'axe (Oz) :

$$m\frac{dv_z}{dt} = mg - 6\pi\eta Rv_z$$

$$m\frac{dv_z}{dt} + 6\pi\eta Rv_z = mg$$

$$\boxed{\frac{dv_z}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{m}v_z = g}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre. On a déjà rencontré ce genre d'équation différentielle dans les circuits RC.

3. Par identification avec la forme canonique, on identifie à un temps caractéristique τ_1 le rapport $\boxed{\tau_1 = \frac{m}{6\pi\eta R}}$.
La vitesse limite est atteinte à la fin du régime transitoire. $v_{\lim,1}$ vérifie l'équation

$$\frac{v_{\lim,1}}{\tau} = g \text{ d'où } \boxed{v_{\lim,1} = g\tau_1}$$

A.N : $\boxed{\tau_1 \simeq 1,3.10^3 \text{ s}}$ et $\boxed{v_{\lim,1} = 9,81 \times 1,3.10^3 \simeq 1,2.10^4 \text{ m.s}^{-1}}$

Graphiquement, on vérifie que le régime permanent est atteint après 4-5 τ et que la vitesse limite est de l'ordre de 10^4 m.s^{-1}. En revanche, la vitesse limite ne semble pas réaliste et ne correspond pas à la vitesse du grêlon au sol .
4. On injecte les définitions proposées dans l'équation différentielle

$$\frac{d(v_{\lim,1} \times V^*)}{d(t^* \times \tau_1)} + \frac{v_{\lim,1} \times V^*}{\tau_1} = \frac{v_{\lim,1}}{\tau_1}$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV^*}{dt^*} + V^* = 1}$$

La solution générale est de la forme : $\boxed{V^* = 1 - \exp(-t^*)}$.
La forme adimensionnée permet de s'intéresser à l'évolution de la vitesse du grêlon, indépendamment de la valeur de $v_{\lim,1}$ et τ_1, donc indépendamment des paramètres du problème (m, R, η...)

Partie 2 : Trainée quadratique en la vitesse

Nous considérons maintenant une modélisation des frottements quadratiques :

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho v^2 S C_x \overrightarrow{U_z}$$

- ρ *est la masse volumique du fluide dans lequel se produit le mouvement* ($\rho_{air} = 1,3 kg.m^{-3}$).
- S *est la* ***surface frontale*** *du grêlon* ***(projection orthogonale du volume de l'objet sur un plan perpendiculaire au déplacement).*** *Dans le cas d'une sphère :* $S = \pi R^2$.
- $C_x \in [0\,;1]$ *est le coefficient de traînée adimensionné (Pour un sphère* $C_x \approx 0,45$*).*

5) *Vérifier que l'expression du coefficient* C_x *est bien adimensionné.*

6) *Etablir l'équation différentielle vérifiée par la composante verticale* v_z *de la vitesse du grêlon. Qualifier cette équation différentielle.*

7) *Sans la résoudre, exprimer puis calculer la vitesse limite* $v_{lim,2}$ *atteinte par le grêlon. Commenter.*

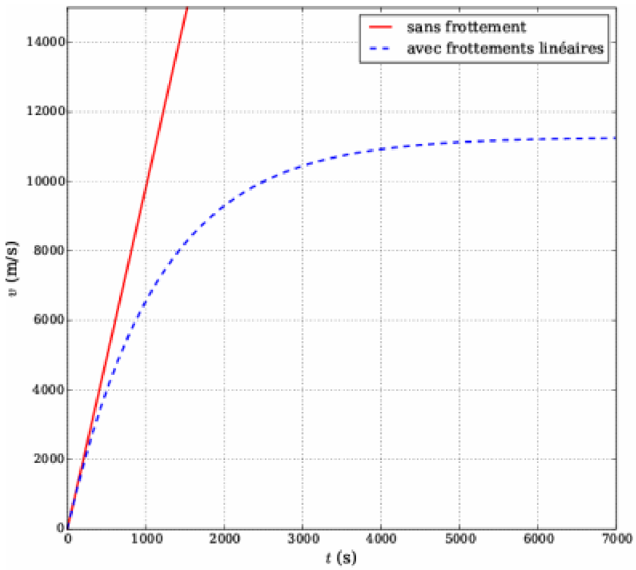
8) *Etablir l'équation différentielle adimensionnée, vérifiée par* $V^* = \frac{v_z}{v_{lim,2}}$*, la mettre sous la forme:*

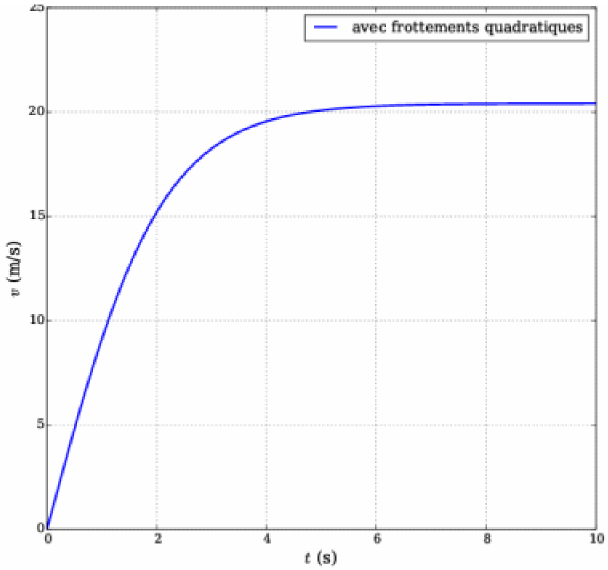
$$\tau_2 \frac{dV^*}{dt} + (V^*)^2 = 1$$

En déduire l'expression et la valeur de la constante de temps τ_2.

Cette équation différentielle non linéaire peut être résolue numériquement à l'aide de Python.

***9)** Commenter la courbe $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ obtenue (**v** est la norme de la vitesse). Quelle durée $\Delta \boldsymbol{t}_2$ met le grêlon pour atteindre sa vitesse limite ?*





<u>Solution :</u>

5. On a $dim(C_x) = \dfrac{dim(\|\overrightarrow{f}\|)}{dim(\rho) \times dim(R^2) \times dim(\|\overrightarrow{v}\|^2)} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{M.L^{-3}.L^2.L^2.T^{-2}} = 1$.

C_x est bien **sans dimension**.

6. Les forces subies sont toujours le poids $\overrightarrow{P}$ et la force de frottement fluide, ici quadratique $\overrightarrow{f}$.

Appliquons le PFD : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f}$, et projettons-le suivant l'axe (Oz) :

$$m\frac{dv_z}{dt} = mg - \frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 v_z^2$$

$$m\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 v_z^2 = mg$$

$$\boxed{\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{2m}\rho C_x \pi R^2 v_z^2 = g}$$

7. La vitesse limite est atteinte à la fin du régime transitoire. On a donc :

$$\frac{1}{2m}\rho C_x \pi R^2 v_{\text{lim},2}^2 = g \text{ soit : } \boxed{v_{\text{lim},2} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_x R^2 \pi}}}$$

A.N : $\boxed{v_{\text{lim},2} = 20,4 \text{ m.s}^{-1} \simeq 75 \text{ km.h}^{-1}}$.

La vitesse limite obtenue avec ce modèle pourrait être en accord avec les données de Météo France concernant la vitesse des grêlons au sol.

8. Partons de l'équation différentielle obtenue Q6 :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{2m}\rho C_x \pi R^2 v_z^2 = g$$

$$\frac{d(V^* \times v_{\text{lim},2})}{dt} + \frac{1}{2m}\rho C_x \pi R^2 V^{*2} \times v_{\text{lim},2}^2 = g$$

$$v_{\text{lim},2}\frac{dV^*}{dt} + gV^{*2} = g$$

$$\boxed{\frac{v_{\text{lim},2}}{g}\frac{dV^*}{dt} + V^{*2} = 1}$$

Par identification, on note $\boxed{\tau_2 = \dfrac{v_{\text{lim},2}}{g}}$. A.N : $\boxed{\tau_2 \simeq 2,1 \text{ s}}$

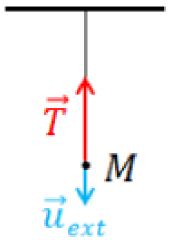
9. La courbe proposée permet de vérifier que la vitesse atteint bien une limite correspondant à celle calculée. Par ailleurs, le régime permanent semble atteint au bout de quelques fois le temps caractéristique τ_2.

3. Pendule simple

c. Tension d'un fil

La force de tension exercée par un fil tendu sur un objet accroché à une extrémités vaut :

$$\vec{T} = -T\overrightarrow{U_{ext}}$$



- $\overrightarrow{U_{ext}}$ est le vecteur radial parallèle au fil, orienté vers l'extérieur du fil.
- $T > 0$ est la norme de cette tension.

Remarque : Si le fil n'est pas tendu, la tension est nulle.

d. Mouvement du pendule simple

*Application : On considère un pendule simple constitué d'un point **M** de masse **m** accroché à l'extrémité d'un fil inextensible, sans masse et sans rigidité, dont l'autre extrémité **O** est fixe dans le référentiel $\mathfrak{R}$ du laboratoire galiléen. On néglige les frottements dus à l'air.*

***1.** Quel est le mouvement du point **M** ? En déduire le système de coordonnées adapté et faire un schéma.*

***2.** Faire le bilan des forces et représenter les forces sur le schéma précédent.*

***3.** Appliquer le principe fondamental de la dynamique.*

***4.** Par une projection du PFD sur un vecteur de la base, Déterminer l'équation du mouvement ?*

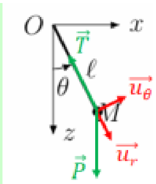
Dans la suite, on se place dans le cadre des mouvements de faible amplitude ($\theta \ll 1$).

***5.** Linéariser l'équation différentielle dans ce cas. A quel type de système déjà étudié cette année l'équation différentielle correspond-elle ?*

***6.** La résoudre avec les conditions initiales suivantes : $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$.*

Solution :

1. Le mouvement du point M est plan et se fait sur un arc de cercle. On choisi donc les coordonnées polaires.
2. Les forces présentes sont le poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$.
3. D'après le PFD, on a $m \times \vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$.
4. Il va être nécessaire de projetter suivant $\vec{u_\theta}$, permettant de « supprimer » l'inconnue $\vec{T}$.



Ainsi :

$$m\vec{a}.\vec{u_\theta} = \vec{P}.\vec{u_\theta}$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

C'est une équation différentielle du deuxième ordre.

5. Pou rles petites angles, $\sin\theta \simeq \theta$ donc l'équation différentielle devient : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$.

On reconnaît l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique**, de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$, oscillant autour d'une position d'équilibre $\boxed{\theta_{eq} = 0}$.

On a déjà rencontré l'oscillateur harmonique lors de l'étude d'un ressort sans frottement ou lors de l'étude de circuits sans résistances électriques (circuit LC).

6. La solution générale est de la forme $\theta = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.
La condition initale sur $\theta(0)$ permet de conclure que $A = \theta_0$.
La deuxième condition initale permet de noter que $\dot{\theta_0} = 0$, et ainsi que $B = 0$.

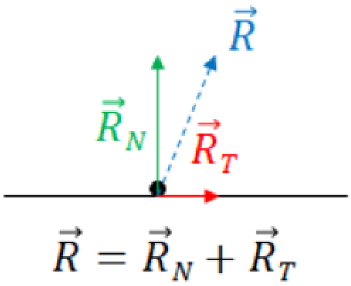
Finalement : $\boxed{\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$

4. Mouvement sur un support solide : frottements solides

Quand un objet est au contact avec un support, ce dernier exerce sur l'objet une force appelée réaction du support notée $\vec{R}$ .Cette force est liée à la répulsion des électrons du support et de l'objet (interaction électromagnétique).

La réaction $\vec{R}$ se décompose en deux parties :

- Une composante normale au support notée $\overrightarrow{R_N}$ dirigée du support vers le point.
- Une composante tangentielle au support notée $\overrightarrow{R_T}$ liée aux frottements solides.



Le sens de $\overrightarrow{R_T}$ dépend de la situation envisagée. S'il n'y a pas de frottements dans le problème, $\overrightarrow{R_T} = \vec{0}$.

Par contre $\overrightarrow{R_N} \neq \vec{0}$ partir du moment ou un support existe.

A priori, $\overrightarrow{R_N}$ n'a pas d'expression particulière et dépend des autres forces en présence. En revanche, il existe des relations entre $\overrightarrow{R_N}$ et $\overrightarrow{R_T}$ qui vous seront données dans les énoncés.

<u>Application :</u> Un conducteur d'une voiture de 1200 kg, roulant sur une route horizontale à 90 km.h^{-1}, réalise un arrêt d'urgence. Malheureusement la voiture n'est pas équipée d'un système d'ABS et le conducteur bloque les roues en appuyant sur la pédale de frein.

On note $\overrightarrow{R_T}$ et $\overrightarrow{R_N}$ les composantes tangentielle et normale de la force de frottement exercée par la route et f le coefficient de frottement solide tel que $f = \frac{\|\overrightarrow{R_T}\|}{\|\overrightarrow{R_N}\|}$.

On donne $f = 1$ (Sur une route sèche) et $f = 0,5$ (Sur une route mouillée).

***1)** Calculer la distance d'arrêt sur route sèche et sur une route mouillée.*

Solution :

Le système est la voiture assimilée à un point matériel. Le référentiel est le référentiel terrestre supposé galiléen. On prend comme repère un plan (Oxz), avec (Ox) l'axe horizontal dans le sens du mouvement de la voiture et (Oz) l'axe vertical ascendant, l'origine des temps et du repère d'espace étant considérées quand le conducteur commence à freiner.

Les forces subies par la voiture sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ *et la réaction du support* $\vec{R} = \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N}$.

D'après le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -R_T \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = R_N - mg \end{cases}$$

Le mouvement est horizontal donc $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$, *on en déduit :*

$$R_N = mg$$

D'où :

$$R_T = fR_N = -fmg$$

Finalement :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -fg$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -fgt + v_0$$

$$x(t) = -\frac{fgt^2}{2} + v_0 t + x_0$$

La condition d'arrêt est $v_x(t_f) = 0$:

$$-fgt_f + v_0 = 0 \Leftrightarrow t_f = \frac{v_0}{fg}$$

Finalement, la distance d'arrêt est donnée par :

$$d = x(t_f) - x_0 = -\frac{fg{t_f}^2}{2} + v_0 t_f = -\frac{{v_0}^2}{2fg} + \frac{{v_0}^2}{fg} = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{fg}$$

Application numérique :

Sur route sèche : $d_1 = \frac{1}{2} \times \frac{25^2}{9{,}81} = 32\ m$

Sur route mouillée : $d_2 = \frac{1}{2} \times \frac{25^2}{0{,}5 \times 9{,}81} = 64\ m$