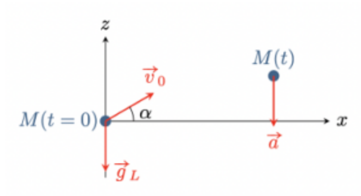
Mouvements de chute libre :

□ Exercice 16.1. Le bond du capitaine Haddock ★ (Coordonnées cartésiennes, trajectoire)

1. On étudie le mouvement du capitaine Haddock, modélisé par un point matériel M de masse m en évolution dans le référentiel lunaire $\mathcal{R}$, supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à son propre poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g_L}$.
D'après la deuxième loi de Newton,

$$m\overrightarrow{a(M/\mathcal{R})} = \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g_L} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{a(M/\mathcal{R})} = \overrightarrow{g_L}$$

Le mouvement étant uniformément accéléré, il va être plan, le repérage le plus naturel pour l'étudier est un repérage cartésien dont un axe est confondu avec l'accélération et l'origine à la position initiale du capitaine Haddock. On peut alors construire le schéma ci-dessous, où on représente à la fois la situation initiale pour introduire les notations et une situation quelconque.



En projection, la deuxième loi de Newton donne (les constantes se déterminent à partir des conditions initiales) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g_L \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -g_L t + v_0 \sin\alpha \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 \cos t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2} g_L t^2 + v_0 \sin\alpha t \end{cases}}$$

2. D'après l'équation du mouvement en x,

$$t = \frac{x}{v_0} \cos\alpha$$

En insérant ce résultat dans l'équation sur z, on trouve l'équation de la trajectoire

$$\boxed{z = -\frac{g_L}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha}$$

3. La distance L parcourue par la capitaine Haddock en sautant est telle que $z(L) = 0$, c'est-à-dire

$$0 = L\left(-\frac{g_L}{2v_0^2 \cos^2\alpha} L + \tan\alpha\right)$$

Mathématiquement, $L = 0$ est bien solution, mais c'est bien sûr le point de départ du bond. La solution qui nous intéresse est telle que

$$-\frac{g_L}{2v_0^2 \cos^2\alpha} L + \tan\alpha = 0$$

On en déduit ainsi, grâce à l'identité trigonométrique $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$,

$$\boxed{L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_L}}$$

4. La distance que parcourerait le capitaine Haddock sur Terre serait de

$$L' = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_T}$$

Ainsi,

$$\boxed{L = \frac{g_T}{g_L} L' = 6L' = 9 \text{ m}}$$

□ Exercice 16.2. Coup franc ! ★★ (Coordonnées cartésiennes, trajectoire, frottements fluides)

1. La seule force exercée sur le ballon pendant son mouvement est son poids. Ainsi, d'après la deuxième loi de Newton, $\vec{a} = \vec{g}$. Par projection, cela donne :

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t$$

En remplaçant t par x via l'équation du mouvement selon (Ox), l'équation de la trajectoire est :

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x}$$

2. Le ballon passe au-dessus du mur si $y(x_{\text{mur}}) > 1,90$. Après calcul :

$$\boxed{y(x_{\text{mur}}) = 2,17 \text{ m} \quad \text{(le ballon passe au-dessus).}}$$

3. Le tir est cadré si $y(x_{\text{but}}) < 2,44$. Après calcul :

$$\boxed{y(x_{\text{but}}) = 1,73 \text{ m} \quad \text{(le tir est cadré).}}$$

4. En tenant compte de la force de frottement $\vec{F}$, la deuxième loi de Newton devient :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

Les équations différentielles pour x et y s'écrivent :

$$\tau\frac{dv_x}{dt} + v_x = 0, \quad \tau\frac{dv_y}{dt} + v_y = -\tau g$$

Après intégration et prise en compte des conditions initiales :

$$v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)e^{-t/\tau}, \quad v_y(t) = \big(v_0 \sin(\alpha) + g\tau\big)e^{-t/\tau} - g\tau$$

Les expressions horaires deviennent, après prise en compte des conditions initiales :

$$\boxed{x(t) = v_0\tau \cos(\alpha)(1 - e^{-t/\tau}), \quad y(t) = \big(v_0\tau \sin(\alpha) + g\tau^2\big)(1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t}$$

5. L'équation de la trajectoire est :

$$\boxed{y(x) = \left(\tan(\alpha) + \frac{g\tau}{v_0 \cos(\alpha)}\right)x + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{v_0\tau \cos(\alpha)}\right)}$$

6. Le ballon passe au-dessus du mur : $\boxed{y(x_{\text{mur}}) = 2,17 \text{ m}}$.

7. Le tir est cadré : $\boxed{y(x_{\text{but}}) = 1,73 \text{ m}}$. On constate que les frottements ont peu d'influence sur ce mouvement (car il n'est pas très rapide donc la force de frottement est restée assez faible).

□ Exercice 16.3. Viscosimètre à bille ★★ (Coordonnées cartésiennes, frottements fluides)

$\boxed{1}$ Par homogénéité de la loi de force,

$$[f] = [6\pi] \times [\eta] \times [R] \times [v] \qquad \text{soit} \qquad [\eta] = \frac{[f]}{[6\pi] \times [R] \times [v]}$$

D'après le PFD,

$$[f] = [m][a] = \text{kg} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

donc

$$[\eta] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{1 \times \text{m} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{[\eta] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$\boxed{2}$ La bille étant de rayon R, son poids vaut $\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a \vec{g}$, et comme elle est complètement immergée la poussée d'Archimède s'exerçant sur la bille est $\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h \vec{g}$. Ainsi, la force résultante de la poussée d'Archimède et du poids s'écrit

$$\boxed{\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_a - \rho_h)\vec{g}}$$

ce qui donne un poids apparent de la forme indiquée par l'énoncé.

$\boxed{3}$ • **Système :** bille ;

• **Référentiel galiléen :** terrestre ;

• **Repérage :** la bille descend et le mouvement est unidimensionnel, on prend donc un axe (Oz) vertical vers le bas, d'où

$$\overrightarrow{OM} = z\,\vec{e}_z \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = v\,\vec{e}_z \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_z = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z\,.$$

• **Bilan des forces :**

▹ poids et poussée d'Archimède de résultante

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_a - \rho_h)\vec{g} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_a - \rho_h) g\,\vec{e}_z\,,$$

▹ force de Stokes

$$\vec{f} = -6\pi\eta R v\,\vec{e}_z\,.$$

• **PFD :**

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} + \vec{f} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_a - \rho_h)\vec{g} - 6\pi\,\eta\,R\,\vec{v}$$

et en exprimant la masse et en projetant

$$\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_a - \rho_h) g - 6\pi\,\eta\,R\,v}$$

$\boxed{4}$ Par définition, lorsque la vitesse limite v_{lim} est atteinte, la vitesse de bille demeure constante, donc

$$0 = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_a - \rho_h) g - 6\pi\,\eta\,R\,v_{\text{lim}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_{\text{lim}} = \frac{2\,R^2\,(\rho_a - \rho_h)\,g}{9\eta}}$$

Le temps caractéristique pour l'atteindre s'obtient en écrivant l'équation différentielle sous forme canonique,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{9\eta}{2R^2\rho_a}v = \frac{\rho_a - \rho_h}{\rho_a}g$$

On identifie alors

$$\boxed{\tau = \frac{2R^2\rho_a}{9\eta}}$$

La distance pour que cette vitesse limite soit atteinte est de l'ordre de $\delta = v_{\text{lim}}\tau$, tout en étant inférieure : ce serait la distance parcourue pendant τ à la vitesse v_{lim}, mais la bille démarre plus lentement, et parcourt donc forcément moins de distance pendant la durée τ. Ainsi,

$$\boxed{\delta = \frac{4\,R^4\,\rho_a\,(\rho_a - \rho_h)\,g}{81\eta^2}}$$

> *En toute rigueur, pour atteindre* vraiment *la vitesse limite il faudrait un temps de chute de 5τ ou 7τ, mais nous verrons dans la suite de l'exercice que ce n'est pas crucial et que cet ordre de grandeur assez approximatif nous permet de conclure.*

$\boxed{5}$ Supposons la vitesse limite atteinte. Elle vaut alors

$$v_{\text{lim}} = \frac{L}{\Delta t} = 1{,}40 \cdot 10^{-2}\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{\eta = \frac{2\,R^2\,(\rho_a - \rho_h)\,g}{9\,v_{\text{lim}}} = 1{,}07\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$$

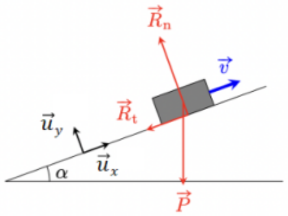
$\boxed{6}$ Pour confirmer que la vitesse mesurée est bien la vitesse limite, il faut que la profondeur $h = 5\,\text{cm}$ du premier repère soit supérieure à la distance δ définie précédemment. À partir de la valeur de viscosité mesurée, on estime

$$\delta = 2{,}8 \cdot 10^{-5}\,\text{m} \ll h\,.$$

Compte tenu de la valeur de δ, la bille atteint en fait sa vitesse limite presque dès le début de la chute : la durée du régime transitoire est très courte. Pour s'en assurer expérimentalement, on peut par exemple diviser en deux ou trois l'intervalle de longueur L et s'assurer que la bille met le même temps à parcourir chaque tronçon : c'est le signe qu'elle n'accélère plus.

Mouvements sur un support solide :

□ Exercice 16.4. Brique sur un plan incliné ★ (Coordonnées cartésiennes, frottements solides)



1. **a.** La brique est soumise à son poids $\overrightarrow{P} = -mg\sin\alpha\overrightarrow{u_x} - mg\cos\alpha\overrightarrow{u_y}$ et à la réaction uniquement normale $\overrightarrow{R_N} = R_N\overrightarrow{u_y}$ (pas de frottements). On applique le PFD à la brique, dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_N}$$

En projetant selon l'axe (Ox), on obtient

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha$$

On intègre deux fois cette expression avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$:

$$\dot{x}(t) = -gt\sin\alpha + v_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{x = -\frac{g\sin\alpha}{2}t^2 + v_0 t}$$

b. La date d'arrêt de la brique est telle que $\dot{x}(t_a) = 0$ soit :

$$\boxed{t_a = v_0/g\sin\alpha = 0,71\ \text{s}}$$

et la distance parcourue par la brique jusqu'à son arrêt est :

$$\boxed{d = x(t_a) = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha} = 0,86\ \text{m}}$$

2. Dans ce cas, la deuxième loi de Newton s'écrit de la même façon, mais la projection sur l'axe (Ox) inclut la composante tangentielle de la réaction du support, soit $R_x = -R_T = -fR_N$. On obtient donc

$$-mg\sin\alpha + R_x = m\ddot{x}$$

et on aura, par ailleurs, besoin de la projection sur (Oy) :

$$-mg\cos\alpha +_N = 0 \Leftrightarrow R_N = mg\cos\alpha$$

On en déduit

$$\ddot{x} = - - (\sin\alpha + f\cos\alpha)g$$

puis on intègre deux fois avec les mêmes conditions initiales, pour obtenir

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}(\sin\alpha + f\cos\alpha)gt^2 + v_0 t}$$

La date d'arrê est obtenue de la même façon, on a donc

$$\boxed{t'_a = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 0,46\ \text{s}}$$

et

$$\boxed{d' = x(t'_a) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 0,55\ \text{m}}$$

Comme on pouvait le prévoir, les frottements ralentissent encore plus la brique et elle s'arrête évidemment plus tôt que dans le premier cas.

□ Exercice 16.5. Descente de ski ★★★ (Coordonnées cartésiennes, frottements solides)

1. La deuxième loi de Newton appliquée à la skieuse dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}$$

En projetant cette relation sur l'axe (Oy), on obtient :

$$-mg\cos(\alpha) + N = 0 \quad \Rightarrow \boxed{N = mg\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad T = fmg\cos(\alpha).}$$

2. La projection sur l'axe (Ox) donne :

$$mg\sin(\alpha) - \lambda\dot{x} - fmg\cos(\alpha) = m\ddot{x},$$

ce qui s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} - a\dot{x} = b,$$

avec $a = \dfrac{\lambda}{m}$ et $b = g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))$.
La solution est donc :

$$\dot{x}(t) = \frac{b}{a} + Ke^{-at},$$

où K est une constante déterminée par les conditions initiales. Avec $\dot{x}(0) = 0$, on trouve $K = -\dfrac{b}{a}$, et donc :

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{mg}{\lambda}(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))(1 - e^{-\lambda t/m}).}$$

En intégrant cette équation avec $x(0) = 0$, on obtient :

$$\boxed{x(t) = \frac{mg}{\lambda}(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))\left(t + \frac{m}{\lambda}e^{-\lambda t/m} - \frac{m}{\lambda}\right).}$$

3. La vitesse limite est donnée par :

$$\boxed{v_l = \frac{mg}{\lambda}(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)).}$$

Numériquement : $\boxed{v_l = 60\,\text{m/s}.}$

4. La date t_1 telle que $\dot{x}(t_1) = \dfrac{v_l}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda t_1/m} = \dfrac{1}{2}$ est :

$$\boxed{t_1 = \frac{m}{\lambda}\ln(2).}$$

Numériquement : $\boxed{t_1 = 6{,}3\,\text{s}.}$

5. En choisissant une nouvelle origine des temps $t' = 0$ et de l'espace $x'(0) = 0$, la vitesse initiale est $\dot{x}'(0) = \dfrac{v_l}{2}$.
Le PFD projette suivant $\vec{u_x}$ devient :

$$mg\sin(\alpha) - 20fmg\cos(\alpha) = m\ddot{x}',$$

et en intégrant, on trouve que $\dot{x}'(t')$ s'annule pour :

$$t'_2 = \frac{v_l}{2(-g\sin(\alpha) + 20fg\cos(\alpha))}.$$

La distance parcourue est donnée par :

$$\boxed{x'(t'_2) = \frac{v_l^2}{8g(20f\cos(\alpha) - \sin(\alpha))}.}$$

Numériquement : $\boxed{x'(t'_2) = 650\,\text{m}.}$

<u>Mouvements circulaires :</u>

□ Exercice 16.6. Oscillation d'un pendule simple ★★ (Coordonnées polaires, oscillateur amorti)

1. Le système étudié est un point matériel M de masse m. Le PFD s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$$

Par projection dans la base polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$:

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$$

Pour des petits angles θ, l'équation devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

En posant $\boxed{\tau = \frac{2m}{\alpha}}$ et $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$, on obtient l'équation demandé.

2. **a.** L'équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$$

Le régime est pseudo-périodique si $\boxed{\omega_0 > \frac{1}{\tau}}$ (discriminant négatif).

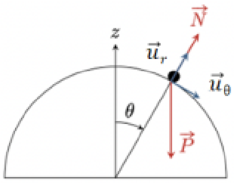
b. **τ est un temps de relaxation, indiquant la durée du régime transitoire.**

3. L'amortissement logarithmique :

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \frac{T}{\tau}}$$

4. Les valeurs numériques : $\boxed{\delta = 0,110}$, $\boxed{T = 1,10 \text{ s}}$, $\boxed{\tau = 10,0 \text{ s}}$, $\boxed{\alpha = 9,4 \times 10^{-2} \text{ kg/s}}$.

□ Exercice 16.7. Glissade sur un igloo ★★ (Coordonnées polaires, réaction d'un support solide)



1. Le système étudié est l'enfant esquimau, en mouvement dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids $\overrightarrow{P}$ et à la réaction $\overrightarrow{R_N}$ de l'igloo, qui est sans frottement. Dans la base polaire, voir figure ci-dessus, on a

$$\overrightarrow{R_N} = R_N \overrightarrow{u_r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P} = -mg\cos\theta\overrightarrow{u_r} + mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

Exprimons l'accélération de l'enfant. Comme l'igloo est sphérique, alors $r = R$ =cste.

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r} \quad \overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \quad \overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

D'après le PFD, on a

$$-mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta \quad \text{et} \quad mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta$$

L'équation du mouvement est celle projetée sur $\overrightarrow{u_\theta}$. L'équation projetée $\overrightarrow{u_r}$ contient en effet une force inconnue R_N, et ne permet donc pas de déterminer le mouvement... Par contre elle permet de déterminer cette force.

2. L'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

ce qui donne en multipliant par $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

Intégrons cette équation par rapport au temps :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R}\cos\theta = C$$

Comme l'enfant s'élance de $\theta = 0$ sans vitesse ($\dot{\theta}(0) = 0$), alors $C = g/R$. On obtient finalement le résultat donné dans enoncé

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)}$$

La méthode pour passer d'une équation sur $\ddot{\theta}$ à une équation portant sur $\dot{\theta}^2$ est à retenir. C'est la même méthode qui permet d'établir le théorème de l'énergie cinétique à partir du PFD.

3. D'après la projection radiale du PFD,

$$\boxed{-mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta \quad \text{donc} \quad R_N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

4. L'enfant décolle de l'igloo si la force R_N de la liaison avec l'igloo s'annule, donc pour un angle θ_d tel que $3\cos\theta_d - 2 = 0$ d'où :

$$\boxed{\theta_d = \arccos\frac{2}{3} \simeq 48°}$$

Ressorts et positions d'équilibres :

□ Exercice 16.8. Oscillations verticales ★ (Oscillateur harmonique)

1. La masse est soumise à son poids $\vec{P} = +mg\,\vec{e_x}$ et à la force de rappel $\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{e_x}$ du ressort. À l'équilibre, on peut écrire le PFD : $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$. Projection sur l'axe (Ox) : $-k(x_{éq} - x_0) + mg = 0$, et on obtient $\boxed{x_{éq} = x_0 + \frac{mg}{k}}$.

2. On applique à nouveau la deuxième loi de Newton à un instant quelconque du mouvement où la longueur du ressort est x : $-k(x - x_0) + mg = m\ddot{x}$, soit $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{éq}}$ avec $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$.

3. a) Cette équation différentielle admet une solution du type $x(t) = A\cos(\omega_0 t + B) + x_{éq}$, A et B étant des constantes à déterminer avec les conditions initiales : $x(0) = A\cos B + x_{éq} = x_{éq}$ donc $\cos B = 0$ et on peut prendre $B = \frac{\pi}{2}$; et $\dot{x}(0) = -\omega_0 A \sin B = -\omega_0 A = v_0$, d'où $A = -\frac{v_0}{\omega_0}$.

On a donc trouvé $x(t) = x_{éq} - \frac{v_0}{\omega_0}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = x_{éq} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

soit $\boxed{x(t) = x_{éq} + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}$.

□ Exercice 16.9. Suspension de voiture ★★ (oscillateur amorti)

1. On étudie le châssis du véhicule, assimilé à un point matériel de masse M, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Forces appliquées à M (à l'équilibre) : son poids $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\,\vec{u_z}$; quatre tensions identiques $\vec{T} = -k(L_e - L_0)\vec{u_z}$. Le PFD donne alors : $M\vec{g} + 4\vec{T} = \vec{0}$. Projection sur $\vec{u_z}$: $-Mg - 4k(L_e - L_0) = 0$ d'où $\boxed{L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k}}$. $z = L + R$ donc $\boxed{z_e = L_0 - \frac{Mg}{4k} + R}$.

Vous n'avez quand même pas oublié le facteur 4 ? Il est cité pas moins de trois fois dans l'énoncé...

À l'équilibre il n'y a pas de force de frottement des amortisseurs, puisque la vitesse est nulle.

2. a) Quatre forces de frottements $\vec{F} = -\lambda\vec{v}(M) = -\lambda\dot{z}\,\vec{u_z}$ s'ajoutent maintenant aux précédentes : $M\vec{g} + 4\vec{T} + 4\vec{F} = M\vec{a}$. Projection sur $\vec{u_z}$: $-Mg - 4k(z - R - L_0) - 4\lambda\dot{z} = M\ddot{z}$ d'où $\ddot{z} + \frac{4\lambda}{M}\dot{z} + \frac{4k}{M}z = -g + \frac{4k}{M}(R + L_0) = \frac{4k}{M}z_e$. En posant $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}$ et $\boxed{Q = \frac{M\omega_0}{4\lambda} = \frac{\sqrt{kM}}{2\lambda}}$, on obtient $\boxed{\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e}$.

➪ *Méthode 13.2*

b) Le retour à l'équilibre le plus bref correspond au régime critique. Le discriminant de l'équation caractéristique $\left(r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0\right)$ est alors nul : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 0$ d'où $Q = \frac{1}{2}$, soit finalement $\boxed{\lambda = \sqrt{kM}}$.

➪ *Méthode 13.3*

c) L'équation caractéristique a pour racine double $r = -\omega_0$. La solution générale est alors : $z(t) = z_e + (At + B)\exp(-\omega_0 t)$. Conditions initiales : $z(0) = z_e - h = z_e + B$ donc $B = -h$; $\dot{z}(0) = 0 = A - \omega_0 B$ donc $A = -\omega_0 h$. Finalement : $\boxed{z(t) = z_e - h(\omega_0 t + 1)\exp(-\omega_0 t)}$.

d) Évolution temporelle :