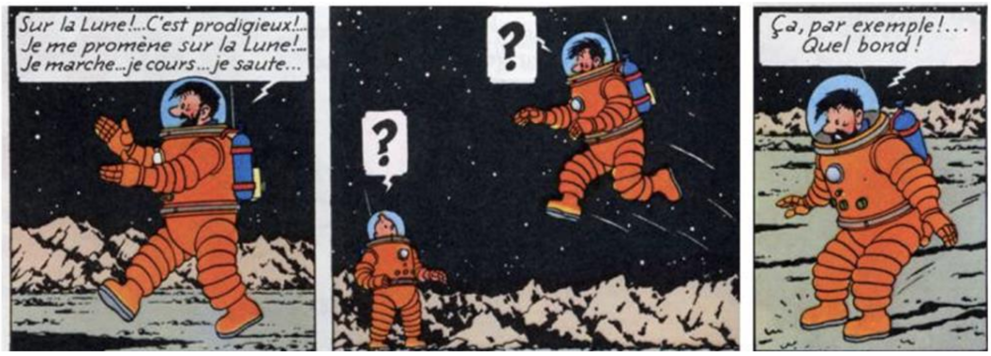
Mouvements de chute libre :

□ Exercice 16.1. Le bond du capitaine Haddock ★ (Coordonnées cartésiennes, trajectoire)

Dans l'album de Tintin On a marché sur la Lune, le capitaine Haddock s'étonne de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur la Terre. Le but de cet exercice est de déterminer la longueur de ce bond.



On assimile le mouvement du capitaine Haddock à celui de son centre d'inertie. Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30°$ avec le sol. On note g_L l'accélération de la pesanteur à la surface de la Lune, environ six fois plus faible que sur Terre.

1. Établir l'équation du mouvement.

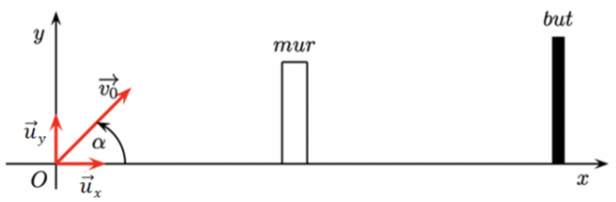
2. En déduire l'équation de la trajectoire du centre d'inertie du capitaine Haddock.

3. Exprimer la distance L qu'il a parcourue en sautant en fonction de v_0, α et g_L.

4. En supposant que le capitaine Haddock est capable de sauter $1,5$ m sur Terre et en admettant qu'il n'est pas gêné par son scaphandre, déterminer numériquement la distance L.

□ Exercice 16.2. Coup franc ! ★★ (Coordonnées cartésiennes, trajectoire, frottements fluides)

On étudie, dans le référentiel terrestre de repère fixe $Oxyz$ un coup franc de football tiré à 20 m , face au but de hauteur $2,44$ m et dans son plan médian vertical (Oxy). L'axe (Oy) est choisi suivant la verticale ascendante.



Le ballon, de masse $m = 430$ g , est assimilé à un point matériel M posé sur le sol initialement en O. Le mur, de hauteur $1,90$ m , est situé à $9,15$ m du ballon. Ce dernier est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ de norme 20 m/s, et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. L'origine des dates correspond au départ du ballon.

Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

1. Établir les lois horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.

2. Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

3. Le tir est-il cadré ?

En réalité, des frottements existent, qu'on modélise par une force $\vec{F} = -h\vec{v}$, où h est une constante positive de valeur $5,0.10^{-3}$ kg/s et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M à chaque instant.

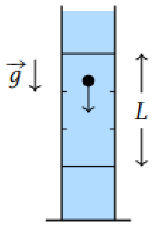
4. Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau = \dfrac{m}{h}$.

5. Donner l'équation de la trajectoire.

6. Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

7. Le tir est-il cadré ?

□ Exercice 16.3. Viscosimètre à bille ★★ (Coordonnées cartésiennes, frottements fluides)



Une méthode très simple à mettre en œuvre pour mesurer la viscosité η d'un fluide relativement visqueux consiste à lâcher une bille dans une éprouvette contenant le fluide et à mesurer sa vitesse limite. On s'intéresse dans cet exercice à une bille en acier de rayon $R = 1\,\text{mm}$ qui tombe dans une huile siliconée. L'huile exerce sur la bille une force de frottement fluide donnée par la loi de Stokes,

$$\vec{f} = -6\pi\,\eta\,R\,\vec{v}\,.$$

Données : masse volumique de l'acier $\rho_a = 7{,}83 \cdot 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et de l'huile $\rho_h = 970\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

1 - Déterminer l'unité de la viscosité η dans le Système International.

2 - Montrer qu'en raison de la poussée d'Archimède tout se passe comme si le poids de la bille était modifié avec une masse volumique apparente $\rho = \rho_a - \rho_h$.

3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la norme de la vitesse de la bille.

4 - Exprimer la vitesse limite atteinte par la bille et la durée caractéristique τ pour atteindre cette vitesse limite. En déduire un ordre de grandeur (surestimé) de la distance de chute nécessaire pour atteindre cette vitesse limite.

5 - On place deux repères distants de $L = 15{,}0\,\text{cm}$ dans l'éprouvette, le premier de ces repères étant situé environ 5 cm sous l'interface entre l'air et l'huile. On mesure une durée de chute $\Delta t = 10{,}7\,\text{s}$. En déduire la viscosité de l'huile siliconée.

6 - Confirmer que supposer la vitesse limite atteinte lorsque la bille passe au niveau du premier repère est une hypothèse tout à fait légitime. Comment aurait-on pu s'en assurer expérimentalement ?

<u>Mouvements sur un support solide :</u>

□ Exercice 16.4. Brique sur un plan incliné ★ (Coordonnées cartésiennes, frottements solides)

On considèe un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. Une brique de masse $m = 600$ g est lancée depuis le bas du plan vers le haut, avec une vitesse $\vec{v_0}$ de norme $2,4$ m.s^{-1}. On utilise, pour étudier le mouvement, un axe (Ox) parallèle au plan incliné et dirigé vers le haut et tel que O coïncide avec le départ de la brique.

1. On suppose que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottements.

  a. Établir l'équation horaire du mouvement de la brique lors de la montée.

  b. Déterminer la date à laquelle la brique s'arrête ainsi que la distance qu'elle aura parcourue.

2. On suppose maintenant qu'il existe des frottements solides. La force de contact a alors la forme suivante : $\vec{R} = \vec{R_N} + \vec{R_T}$, avec $\vec{R_T}$ colinéaire et de sens contraire à la vitesse, et $R_T = fR_N$ où $f = 0,20$ est un coefficient de frottement.

Répondre aux mêmes questions dans ce cas.

□ Exercice 16.5. Descente de ski ★★★ (Coordonnées cartésiennes, frottements solides)

Madame Michu descend une piste à ski, selon la ligne de plus grande pente faisant l'angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement supposée de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, où λ est un coefficient positif et $\vec{v}$ la vitesse de la skieuse. On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la réaction exercée par la neige, et f le frottement solide tel que $T = fN$.
On choisit comme origine de l'axe (Ox) de la ligne de plus grande pente la position initiale de la skieuse, supposée partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable. On note (Oy) la normale à la piste dirigée vers le haut.

1. Calculer les normes T et N.

2. Calculer la vitesse et la position de la skieuse à chaque instant.

3. Montrer qu'elle atteint une vitesse limite v_l. Application numérique : calculer v_l avec $\lambda = 8,8$ kg/s, $m = 80$ kg, $\alpha = 45°$, et $f = 0,055$.

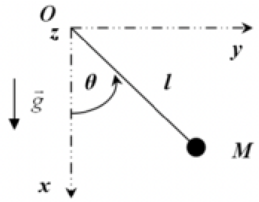
4. Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où la skieuse a une vitesse égale à $v_l/2$.

5. À la date t_1, Madame Michu tombe. On néglige alors la résistance de l'air, et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 20. Calculer la distance parcourue par Madame Michu avant de s'arrêter.

Mouvements circulaires :

□ Exercice 16.6. Oscillation d'un pendule simple ★★ (Coordonnées polaires, oscillateur amorti)

Un pendule simple est constitué d'un point matériel M, de masse m, lié à l'extrémité d'un fil de longueur L et de masse nulle, l'autre extrémité étant fixe en un point O. On suppose que le mouvement a lieu dans le plan vertical (Oxy), et on repère la position de M avec l'angle polaire θ (voir figure), l'angle θ restant toujours faible. À l'instant $t = 0$, on lâche la masse depuis un angle θ_0, sans vitesse initiale.



Lorsqu'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par une force $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse du point M, et α une constante positive.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ et l'écrire sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

2. a. À quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?
On supposera dans la suite que cette condition est vérifiée et que l'angle θ peut se mettre sous la forme $\theta(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\Omega t + B)$ où A et B sont des constantes et $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{\tau^2}}$

b. Que représente physiquement τ ?

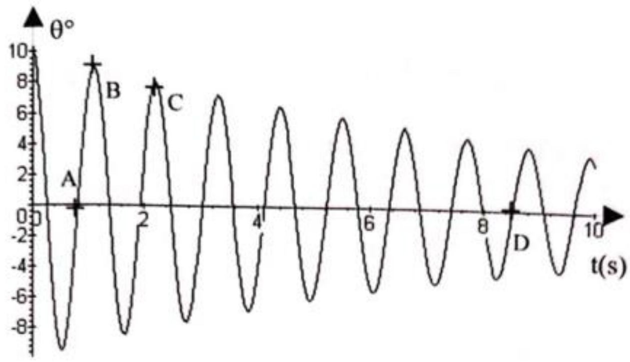
3. On appelle décrément logarithmique la quantité $\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$. Exprimer δ en fonction de T et τ.

4. La figure ci-dessous représente les variations de θ avec le temps. On précise les coordonnées de quatre points particuliers.

Points	A	B	C	D
$t(s)$	0,53	1,10	2,20	8,25
$\theta(rad)$	0,00	8,95	8,02	0,00

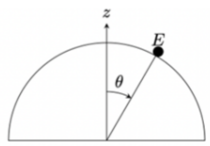
La masse est m = 470 g. Calculer numériquement, à partir des valeurs expérimentales :

- le décrément logarithmique δ
- la pseudo-période T
- le temps τ
- la constante α



□ Exercice 16.7. Glissade sur un igloo ★★ (Coordonnées polaires, réaction d'un support solide)

Cet exercice s'intéresse à la glissade d'un enfant esquimau E de masse m sur le toit d'un igloo d'où il s'élance sans vitesse initiale. L'enfant glisse sans aucun frottement à la surface de l'igloo. Sa position est repérée par l'angle θ. Pour simplifier, l'igloo est supposé sphérique de rayon R.



1. Appliquer la deuxième loi de Newton à l'enfant pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement, qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre équation contient-elle ?

2. En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, montrer que :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$$

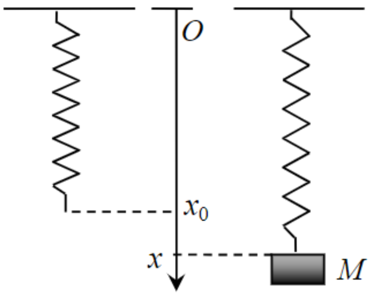
3. En déduire l'expression de la force de réaction de l'igloo.

4. L'enfant décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

Ressorts et positions d'équilibres :

□ Exercice 16.8. Oscillations verticales ★ (Oscillateur harmonique)

On considère le système ci-contre : une masse m est suspendue à un ressort vertical idéal, de masse négligeable et de raideur k. L'extrémité supérieure du ressort est fixe et attachée au point O. On utilise l'axe (Ox), vertical et dirigé vers le bas pour repérer la position de l'extrémité libre du ressort par son abscisse x. Soit x_0 la longueur à vide du ressort et $x_{éq}$ sa longueur lorsque la masse m est accrochée à l'extrémité inférieure du ressort et est à l'équilibre.



1. Exprimer $x_{éq}$ en fonction de m, g, k et x_0.

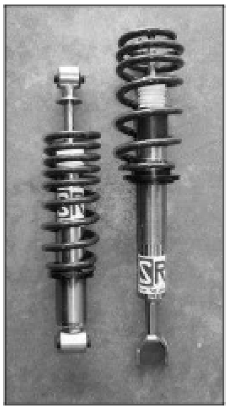
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x lorsque la masse est en mouvement.

3. À l'instant $t = 0$, la masse m est dans une position telle que la longueur du ressort est égale à $x_{éq}$. On lui communique alors une vitesse v_0 verticale et dirigée vers le bas.

a) Déterminer l'expression de $x(t)$ en fonction des données du problème.

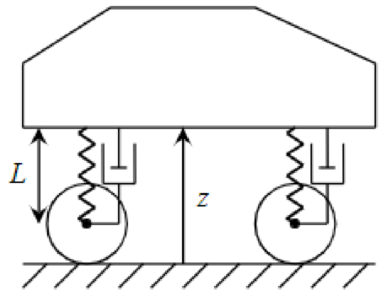
b) Exprimer la période T_0 des oscillations.

□ Exercice 16.9. Suspension de voiture ★★ (oscillateur amorti)



La suspension d'une voiture est assurée par quatre systèmes identiques indépendants, montés entre le châssis et chaque arbre de roue, et constitués chacun :
– d'un ressort hélicoïdal de constante de raideur k et de longueur à vide L_0 ;
– d'un amortisseur tubulaire à piston, fixé parallèlement au ressort, exerçant une force de frottement visqueux linéaire de coefficient d'amortissement λ.
On suppose que la masse totale M (voiture et passagers) est toujours également répartie entre les *quatre* systèmes.

Les roues de rayon R sont considérées comme entièrement rigides. On n'envisage que des déplacements verticaux du châssis, repéré par son altitude z par rapport au sol ; la longueur commune des quatre ressorts est notée L.



1. Le véhicule étant immobile sans freins sur un sol horizontal, quelle est la longueur L_e des ressorts au repos et la « garde au sol » z_e du véhicule ?

2. Le châssis est abaissé d'une hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

a) Établir l'équation différentielle de la position $z(t)$ du châssis par rapport au sol. On introduira la grandeur $\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ et un facteur de qualité Q dont on précisera l'expression.

b) L'amortisseur a été réglé de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final *le plus bref possible*, lorsque la masse M est seulement celle de la voiture (1100 kg). Quelle doit être la valeur de λ en fonction de M et k ?

c) Déterminer alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de z_e, h et ω_0.

d) Tracer l'allure de la courbe représentant l'évolution de z en fonction du temps.