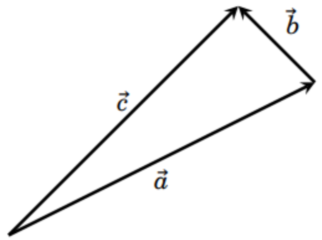
I] Vecteur : Définition, produit scalaire et projections

1. Définition

Un **vecteur** (au sens géométrique) est un objet défini par un ensemble de **trois éléments : sa direction, son sens et sa norme**.

En physique, certains vecteurs représentent des « distances orientées » (vecteur position) mais aussi d'autres grandeurs (vitesse, accélération, moment cinétique…). Il faut donc être prudent avec les échelles de représentation car on dessine souvent plusieurs grandeurs vectorielles de natures différentes sur un schéma.

On peut sommer géométriquement deux vecteurs par la relation de Chales. Par exemple, sur le dessin ci-contre : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



2. Produit scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un scalaire (nombre), noté $\vec{A} \bullet \vec{B}$, défini de la manière suivante :

$$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos(\alpha)}$$

Avec α l'angle entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, de normes respectives $\|\vec{A}\|$ et $\|\vec{B}\|$.

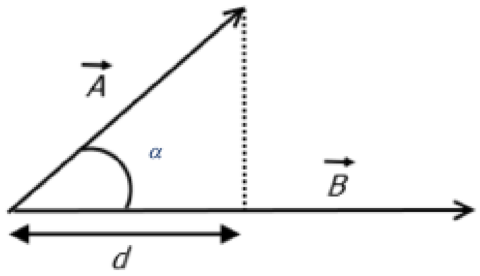
Conséquence : Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

3. Projection d'un vecteur

D'après la définition :

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \cos(\alpha) \cdot \|\vec{B}\| = d \cdot \|\vec{B}\|$$

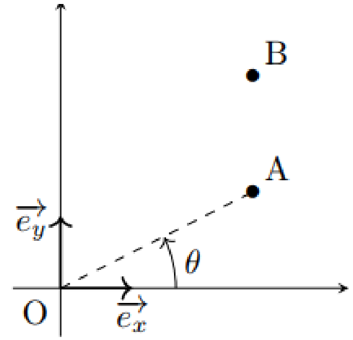
Ou d désigne la projection orthogonale (ou composante) du vecteur $\vec{A}$ sur $\vec{B}$.



Exercice 1. Projection de vecteurs

On considère deux points **A** et **B** tels que la droite **(AB)** est parallèle à la droite **(Oy)**. Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ fait un angle θ avec l'axe **(Ox).**

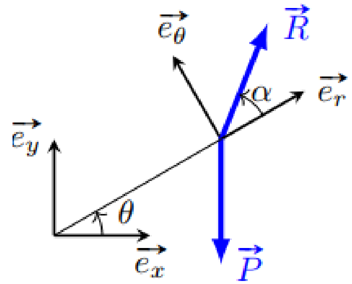
Exprimer les vecteurs suivants dans le base $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ en fonction de $a = \|\overrightarrow{OA}\|$, $b = \|\overrightarrow{AB}\|$ et de l'angle θ.



1) $\overrightarrow{OA}$ 2) $\overrightarrow{OB}$ 3) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

Exercice 2. Projection de vecteurs

Calculer les produits scalaires suivants en fonction des normes $\|\vec{R}\| = R$ et $\|\vec{P}\| = P$ ainsi que des différents angles sur le schéma.

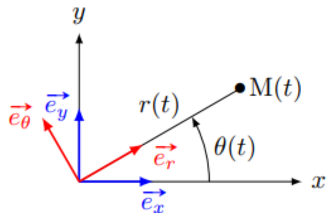


1) $\vec{R} \bullet \vec{e_y}$ 2) $\vec{P} \bullet \vec{e_\theta}$

Exercice 3. Projection de vecteurs

Reprendre la situation de l'exercice **2** et exprimer les vecteur $\vec{R}$ et $\vec{P}$ dans les bases $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ et $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

II] Dérivation d'un vecteur, coordonnées polaires



*On considère un point **M** en mouvement dans le plan **(xOy)**. On note $\boldsymbol{r(t)}$ et $\boldsymbol{\theta(t)}$ les coordonnées de **M** dans le repère polaire **(O, $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$).***

1) Exprimer les vecteurs $\vec{e_r}$ *et* $\vec{e_\theta}$ dans la base cartésienne **(O, $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$).**

2) Exprimer $\frac{d\vec{e_r}}{dt}$ *et* $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$ dans la base cartésienne **(O, $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$).**

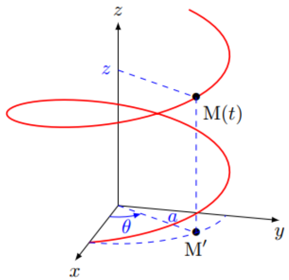
3) En déduire l'expression de $\frac{d\vec{e_r}}{dt}$ *et* $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$ dans la base polaire **(O, $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$).**

4) Finalement, exprimer les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ dans la base polaire **(O, $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$).**

5) A l'aide du schéma, exprimer les coordonnées polaires r et θ en fonction des coordonnées cartésiennes x et y et inversement.

<u>Application :</u> Le point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrit une trajectoire hélicoïdale, définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) = a \cdot \sin(\omega t) \\ z(t) = b \cdot t \end{cases}$$



6) Déterminer les coordonnées cylindriques $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$ du point **M**.

7) Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}$ dans la base cartésienne **(O, $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$)** et dans la base cylindrique **(O, $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$, $\vec{e_z}$).** Vérifier que sa norme a bien la même expression dans les deux systèmes de coordonnées.

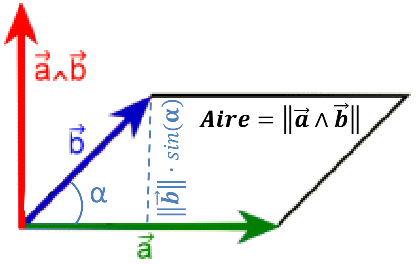
8) Déterminer l'expression de l'accélération $\vec{a}$ dans la base cartésienne **(O, $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$)** et dans la base cylindrique **(O, $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$, $\vec{e_z}$).** Vérifier que sa norme a bien la même expression dans les deux systèmes de coordonnées.

9) Quelle base est la plus adaptée pour traiter ce problème ? Pourquoi ?

III] Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel une application de l'espace géométrique défini de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, qui à deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ associe un nouveau vecteur noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$ tel que :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{a} \quad \text{et} \quad \vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{b} \\ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}) \text{ est une base directe.} \\ \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha) \end{cases}}$$



Avec **α** l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

<u>Remarque :</u> Quelques propriétés du produit vectoriel utiles.

- $\vec{a} \wedge \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
- $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow$ ***$\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.***
- $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$ **s'interprète comme l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.**

Exercice 4. Calcul de produit vectoriel

En utilisant le schéma de l'exercice **2** et les résultats de l'exercice **3**, donner l'expression des produits vectoriels suivants.

Comme d'habitude, on complète la base $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ par le vecteur $\vec{e_z}$ suivant la « règle de la main droite ».

1) $\vec{P} \wedge \vec{e_y}$ 2) $\vec{P} \wedge \vec{e_x}$ 3) $\vec{e_r} \wedge \vec{R}$ 4) $\vec{R} \wedge \vec{e_z}$ 5) $\vec{P} \wedge \vec{R}$