Introduction :

Plutôt que de décrire précisément le mouvement d'un objet à chaque instant. On peut s'intéresser aux échanges d'énergies engendrés par cette transformation.

L'approche énergétique permet alors de déterminer des vitesses ou des positions finales sans décrire la totalité d'un mouvement, ce qui en fait un outil particulièrement efficace pour résoudre des problèmes en mécanique.

Par ailleurs, l'approche énergétique est transverse en physique et les percepts abordées seront repris dans le cours thermodynamique.

I] Première approche : intégrale première du mouvement

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la 2ème loi de Newton conduit à des équations différentielles sur les dérivées secondes des coordonnées.

Dans ce paragraphe, nous allons voir que l'on peut intégrer ces équations, amenant à une interprétation en termes de réservoir d'énergie.

1. Exemple n°1 : chute libre ★

Application : *Hauteur atteinte par un ballon.*

Une rugbyman réalise une chandelle avec un ballon modélisé par un point matériel ***M*** *de masse* $\boldsymbol{m = 400\ g}$*, les frottements sont négligés. On étudie ce système dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que le mouvement est verticale et on donne la vitesse initiale du ballon* $\boldsymbol{v_0 = 20\ m.s^{-1}}$**.**

1) *Déterminer la hauteur atteinte par le ballon.*

2. Exemple n°2 : Oscillateur harmonique ★

3. Conclusion

Pour certains mouvements, on peut interpréter l'évolution comme **un transfert d'énergie mécanique** entre deux réservoirs : celui **d'énergie cinétique** (toujours positive) et celui **d'énergie potentielle** (qui dépend des actions mécaniques mises en jeu).

II] Théorème de l'énergie cinétique

1. Définition de l'énergie cinétique

On considère un système point matériel M de masse **m** dont le mouvement est décrit dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, soumis à des forces de résultante $\vec{F}$. Ecrivons la 2ème loi de Newton :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}\bullet\vec{v}=\vec{F}\bullet\vec{v} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2\right)=\vec{F}\bullet\vec{v}$$

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m, en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$:

$$\boxed{E_c=\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2}$$

L'énergie cinétique est homogène à une énergie $M.L^2.T^{-2}$ et son unité **SI** est le Joule **J**.

2. Puissance d'une force

On appelle puissance exercée par la force $\vec{F}$ sur le point **M** animé par la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$:

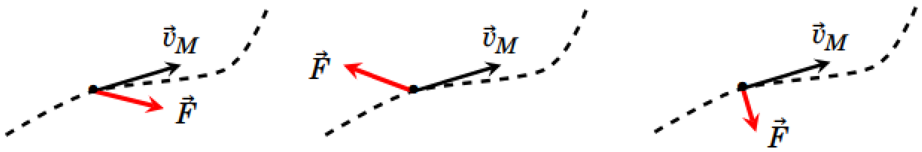
$$\boxed{P_{\vec{F}\to M}=\vec{F}\bullet\vec{v}}$$

La puissance est homogène à $M.L^2.T^{-3}$. Son unité dans le **SI** est le **Watt** (**W**, $1\,W=1\,J.s^{-1}$)

3. Force motrice et résistante

La présence d'un produit scalaire conduit à plusieurs cas :

- Soit la force et le mouvement vont dans le même sens ($P>0$) : la force est **motrice.**
- Soit la force et le mouvement vont dans un sens opposé ($P<0$) : la force est **résistante.**
- Soit la force et le mouvement sont orthogonaux ($P=0$) : La force **ne travaille pas**.



Force motrice | Force résistante | Force ne travaillant pas

<u>Application :</u> La luge.

*On considère une luge glissant avec frottements solide de coefficient **f** sur une pente d'angle **α** avec l'horizontale.*

***1)** Faire un schéma et représenter les forces s'exerçant sur la luge.*

***2)** Déterminer les puissances des forces en présence.*

***3)** En déduire la nature motrice ou résistante de ces forces.*

4. Travail d'une force le long d'un chemin

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ appliquée au point **M** au cours du déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est défini par :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{dOM}}$$

Le travail est homogène à une énergie $M.L^2.T^{-2}$. Son unité dans le **SI** est le **J.**

On définit le travail global fourni par une force à un point matériel entre deux positions A et B le long de sa trajectoire **(**AB**)** en sommant les contributions des travaux élémentaires :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \int_{M \in AB} \delta W(\vec{F}) = \int_{M \in AB} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dOM}}$$

Remarques :

- *Le travail représente l'énergie cédée au système par la force* $\vec{F}$ *entre les points **A** et **B**.*

- *Le travail d'une force peut s'exprimer en fonction de la puissance et inversement.*

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{dOM} = \vec{F} \bullet \vec{v}dt = P_{\vec{F} \to M} dt$$

- *La notation* δW *et non* dW *pour le travail élémentaire vient d'une propriété particulière: **il dépend a priori du chemin suivi par le point matériel (cf. II.1)**. Il ne dépend donc pas seulement de la position de ce dernier (son état). D'où* $\int_{M \in AB} \delta W(\vec{F})$ *ne dépend pas que des états* A *et de* B*. En conséquence, on ne peut pas écrire cette intégrale avec une primitive simple de* $\delta W(\vec{F})$*.*

- *Dans le cas d'une **force constante**, le calcul se simplifie et donne :*

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_{M \in AB} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dOM} = \vec{F} \bullet \int_{M \in AB} \overrightarrow{dOM} = \vec{F} \bullet (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{AB}$$

5. Théorème de l'énergie et de la puissance cinétique ★

Application : *Le curling.*

Un palet glisse sur un support horizontal avec une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0 \overrightarrow{U_x}$ *(état initial* A*, position initiale choisie en* $x_A = 0$*). Il est soumis de la part du support à une force de frottements secs opposée à sa vitesse de glissement et de norme* $R_T = fR_N$ *d'après les lois de Coulomb. Cette force arrête le palet en* B*.*

***1)** Faire un schéma. Représenter les forces.*

***2)** Déterminer les travaux des forces entre **A** et **B**.*

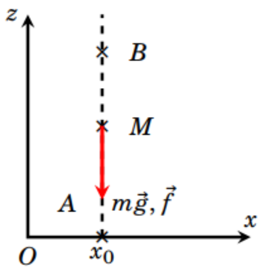
***3)** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la position d'arrêt* x_B*.*

II] Energie potentielle et forces conservatives

1. Forces conservatives

Une force $\vec{F}$ est **conservative** si le travail $W_{AB}(\vec{F})$ ne dépend pas du chemin suivi de **A** à **B**.

Exemple : *Elévation d'une masse.*



On considère un point, soumis à son poids, à une force de traînée (modèle linéaire), qui effectue un trajet entre $A(x_0, 0, 0)$ et $B(x_0, 0, z_B)$.

a) *Déterminons le travail du poids (force constante) :*

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \bullet \overrightarrow{AB} = -mgz_B$$

Cette expression est valable quel que soit le chemin suivi par le système, elle ne dépend que des coordonnées des points A et B.

b) *Calculons le travail de la force de trainée linéaire (force non constante) :*

$$\delta W(\vec{f}) = -\lambda\vec{v} \bullet \overrightarrow{dOM} \quad \Rightarrow \quad W_{(AB)}(\vec{f}) = -\lambda \int_{M \in AB} \vec{v} \bullet \overrightarrow{dOM}$$

On constate qu'on ne peut pas finir le calcul de l'intégrale sans connaître les lois horaires, puisqu'on ne connaît pas la fonction $\vec{v}(t)$. Pour finir le calcul, prenons deux chemins :

- *Une élévation uniforme entre **A** et **B** : $z(t) = v_0 t$.*

$$W_{(AB)}(\vec{f}) = -\lambda \int_0^{z_B} v_0 dz = -\lambda v_0 z_B$$

- *Une élévation uniformément accélérée entre **A** et **B** : $z(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$.*

$$W_{(AB)'}(\vec{f}) = -\lambda \int_0^{z_B} \vec{v} \bullet \overrightarrow{dOM} = -\lambda \int_0^{z_B} a_0 t dz = -\lambda \int_0^{z_B} \sqrt{\frac{2z}{a_0}} dz = -\lambda \sqrt{\frac{2}{a_0}} \int_0^{z_B} \sqrt{z} dz$$

$$W_{(AB)'}(\vec{f}) = -\lambda \sqrt{\frac{2}{a_0}} \times \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right]_0^{z_B} = -\lambda\, z_B \sqrt{\frac{4z_B}{3a_0}} \neq W_{(AB)}(\vec{f})$$

Le travail dépend du chemin suivi, la force de frottement fluide n'est pas conservative.

Conséquence : *Le travail d'une force conservative $\vec{F_c}$ sur n'importe quel chemin fermé (c'est-à-dire qui revient à sa position initiale) est nécessairement nul :*

$$W_{AA}(\vec{F_c}) = \int_{M \in AA} \vec{F_c} \bullet \overrightarrow{dOM} = \oint \vec{F_c} \bullet \overrightarrow{dOM} = 0$$

Pour montrer qu'une force est non conservative, il est possible de calculer son travail sur un chemin fermé : si ce travail est non nul, alors elle ne peut pas être conservative.

2. Energie potentielle ★
3. Force dérivée d'une énergie potentielle ★
   a. Cas 1D

<u>Application :</u> *Etablir les énergies potentielles associées aux forces classiques.*

1) *Etablir l'énergie potentielle de pesanteur (pour un axe (Oz) orienté vers le haut et vers le bas).*

2) *Etablir l'énergie potentielle élastique. On choisira $E_p(x = l_0) = 0$.*

3) *Rappeler l'expression de la force gravitationnelle exercée par une masse m_c située en **C** sur une masse m située en **M**. Etablir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle.*

   b. Cas 3D

<u>Outils mathématiques :</u>

La **dérivée partielle** d'une fonction $g(x, y, z)$ par rapport à la variable x, avec y et z maintenues constantes est définie par :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x + \delta x, y, z) - g(x, y, z)}{\delta x}$$

La **différentielle totale** d'une fonction $g(x, y, z)$, notée dg, de 3 variables x, y, z indépendantes est définie par :

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{x,y} dz$$

Le **gradient** de cette fonction réelle $g(x, y, z)$ des trois coordonnées d'un point $\mathbf{M}(x, y, z)$ est défini comme le vecteur «accroissement» qui donne la variation de g le long d'un petit déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ **:**

$$dg = \overrightarrow{grad(g)} \bullet \overrightarrow{dOM}$$

La définition de l'opérateur gradient fait intervenir le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ qui dépend du système de coordonnée choisi. Ainsi, on peut expliciter l'expression de l'opérateur gradient :

- En coordonnées cartésiennes *:* $\overrightarrow{grad(f)} = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{U_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{U_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{U_z}$
- En coordonnées cylindriques *:* $\overrightarrow{grad(f)} = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{U_z}$
- En coordonnées sphériques *:* $\overrightarrow{grad(f)} = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{U_\varphi}$

Dans le cas 3D, revenons à la définition de l'énergie potentielle à partir de sa différentielle : Pour toutes force conservative $\overrightarrow{F_c}$**,** il existe une fonction $E_p(x,y,z)$ tel que :

$$dE_p = -\overrightarrow{F_c} \bullet \overrightarrow{dOM}$$

D'après la définition du gradient :

$$dE_p = \overrightarrow{grad(E_p)} \bullet \overrightarrow{dOM}$$

D'où :

$$-\overrightarrow{F_c} \bullet \overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{grad(E_p)} \bullet \overrightarrow{dOM}$$

Finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{F_c} = -\overrightarrow{grad(E_p)}}$$

Application : *Déterminer l'expression d'une force conservative à partir de l'énergie potentielle associée.*

Pour les énergie potentielles proposées, déterminer la force conservative associée.

1) *L'énergie potentielle de pesanteur en coordonnées polaires :* $E_p = -mgrcos(\theta) + cste$.

2) *L''énergie potentielle d'un particule chargée* q *en* ***M****, en interaction coulombienne avec une particule chargée* q_0 *en* ***O****, s'écrit en coordonnées sphériques centrées sur* ***O***

$$E_p = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

III] Energie mécanique

1. Définition

L'énergie mécanique d'un système est la somme de son énergie cinétique et de toutes les énergies potentielles des forces conservatives auxquelles il est soumis :

$$\boxed{E_m = E_c + \sum E_p}$$

2. Théorème de la puissance et de l'énergie et mécanique

On considère un système point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse **m** dont le mouvement est décrit dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Ecrivons la 2ème loi de Newton en séparant les contributions des forces conservatives et non conservatives :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_C} + \sum \overrightarrow{F_{NC}}$$

$$\Rightarrow\ m\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2\right) = \frac{d}{dt}(E_c) = \sum \overrightarrow{F_C} \bullet \vec{v} + \sum \overrightarrow{F_{NC}} \bullet \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}(E_c) - \sum \overrightarrow{F_C} \bullet \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} = \sum P_{NC}$$

$$\frac{d}{dt}(E_c) + \sum \frac{dE_p}{dt} = \sum P_{NC}$$

On en déduit le **théorème de la puissance mécanique** :

$$\boxed{TPM:\ \ \frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E_c + \sum E_p\right) = \sum P_{NC}}$$

En intégrant entre deux états **A** et **B**, il vient le **théorème de l'énergie mécanique :**

$$dE_m = \sum P_{NC}\, dt\ \ \Rightarrow\ \ \int_A^B dE_m = \sum \int_A^B \overrightarrow{F_{NC}} \bullet \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt}\ dt = \sum \int_A^B \delta W\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)$$

$$\boxed{TEM:\ \ \Delta_{AB}E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)}$$

<u>Remarque :</u> L'énergie mécanique se conserve, c'est-à-dire reste constante si et seulement si la puissance des forces non conservatives est nulle.

<u>Application :</u> Pendule simple par l'énergie.

*On étudie le pendule simple : une masse ponctuelle **m** est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible sans masse de longueur **ℓ**, que l'on fait osciller dans un plan vertical.*

Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème de la puissance mécanique.

V] Mouvements conservatifs à une dimension

1. Courbe d'énergie potentielle

Considérons le mouvement conservatif d'un point matériel soumis à des forces conservatives associées à une énergie potentielle totale $E_p(x)$. Notons E_{m0} son énergie mécanique initiale.

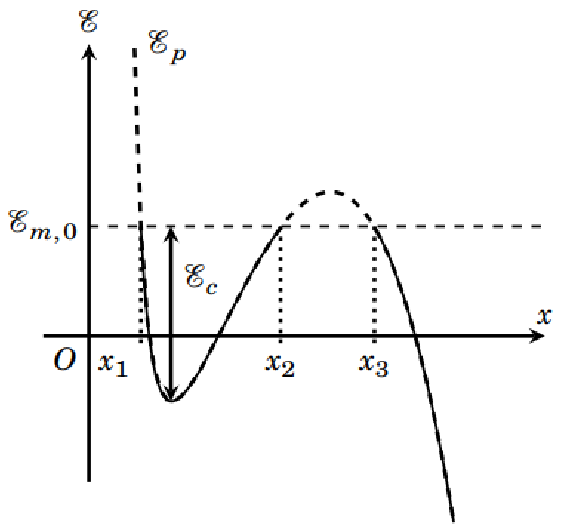
Le théorème de l'énergie mécanique nous garantit alors que $E_m = E_{m0}$ est constante au cours du mouvement. Par la suite, on peut écrire la conservation de l'énergie :

$$E_m = E_c + E_p$$

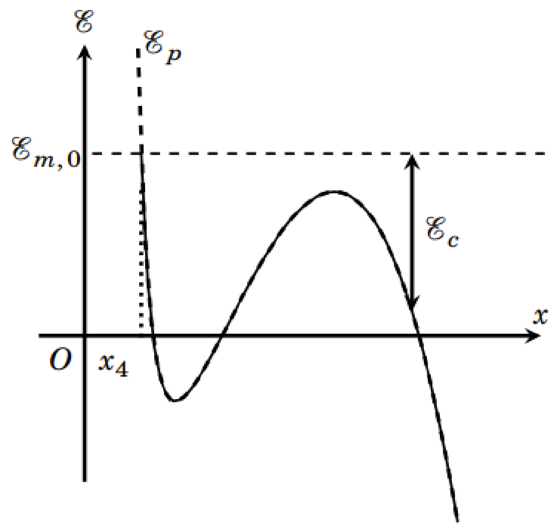
$$E_p(x) = E_{m0} - \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 \leq E_{m0}$$

Le point matériel ne peut accéder qu'aux lieux x où l'énergie potentielle est inférieure à E_{m0}.

Traçons $E_p(x)$ et plaçons diverses possibilités de E_{m0} ci-dessous :



$\mathscr{E}_m < \mathscr{E}_{p,\max}$



$\mathscr{E}_m > \mathscr{E}_{p,\max}$

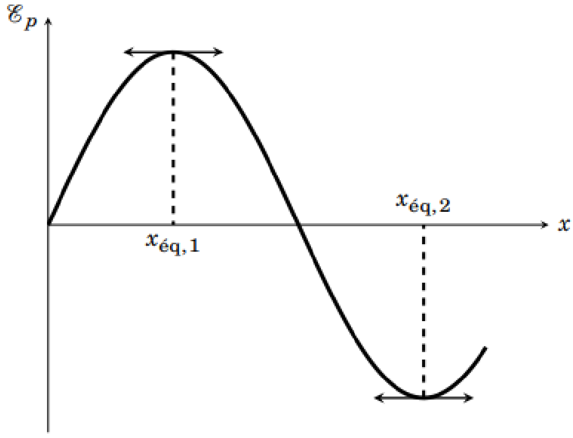
On distingue deux cas sur les schémas ci-dessus :

- Si dans le cas où E_{m0} est inférieure au col d'énergie potentielle (*graphe de gauche*) et où la particule est initialement entre x_1 et x_2, elle est bloquée entre ces deux positions. On parle **d'état lié**. Le col d'énergie potentielle infranchissable est appelé **barrière de potentiel.** La zone entre deux barrières dont une particule de trop faible énergie ne peut pas s'extraire, on parle de **puits de potentiel**.

- Si la particule peut atteindre la position x_3 (soit parce que son énergie mécanique est suffisante pour passer le col, soit parce qu'elle est initialement de ce côté du col), elle peut s'éloigner indéfiniment. On parle **d'état de diffusion**.

<u>Remarque :</u> Pour raisonner, on peut voir le diagramme d'énergie potentielle comme un dénivelé, puisque pour l'énergie potentielle de pesanteur, $E_p = mgz$ est proportionnelle au dénivelé z.

2. Position d'équilibre



Une **position d'équilibre** une position pour laquelle le point matériel subit une force globalement nulle :

$$\boxed{\vec{F}(x = x_{eq}) = \vec{0}}$$

Dans le cas d'un système conservatif à une dimension, il vient :

$$\overrightarrow{F_C} = -\frac{dE_p}{dx}\overrightarrow{U_x} \Rightarrow \boxed{\frac{dE_p}{dx}(x = x_{eq}) = 0}$$

On peut alors séparer deux cas :

• Pour un minimum de E_p, si le point s'éloigne un peu de la position x_{eq}, la force devient non nulle et est orientée vers la position d'équilibre : il s'agit d'une position **d'équilibre stable**.

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_{eq}) > 0$$

• Pour un maximum de E_p, si le point s'éloigne un peu de la position x_{eq}, la force devient non nulle et est orientée à l'opposé de la position d'équilibre : il s'agit d'une position **d'équilibre instable.**

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_{eq}) < 0$$

3. Petits mouvements autour d'un équilibre stable

Soit un système conservatif (sans dissipation) décrit par une variable $x(t)$, évoluant dans un profil d'énergie potentielle $E_p(x)$ et étudions son mouvement autour d'une position d'équilibre x_{eq}.

Par définition de l'équilibre : $\vec{F}(x = \mathrm{x}_{eq}) = \vec{0} \Rightarrow \frac{dE_p}{\mathrm{dx}}(x = \mathrm{x}_{eq}) = 0$.

Par la suite, en réalisant un développement de Taylor de E_p au voisinage de x_{eq}, il vient :

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq})(x - x_{eq})^2 + o\left((x - x_{eq})^2\right)$$

En posant $k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0$ et $X = x - x_{eq}$, l'énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre s'écrit :

$$E_p(X) = \frac{1}{2}kX^2 + Cste + o(X^2)$$

Finalement, au termes négligeables devant X^2 près et en appliquant le théorème de l'énergie mécanique, il vient :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}(E_m) = \frac{d}{dt}\left(E_p + E_c\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kX^2 + \frac{1}{2}m\dot{X}^2\right) = 0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0}}$$

Que l'on identifie à la forme canonique d'un oscillateur harmonique :

$$\boldsymbol{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0} \quad avec \quad \boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

<u>Conclusion :</u> Un système de masse $\boldsymbol{m}$ en mouvement conservatif d'énergie $\boldsymbol{E_p(X)}$ autour d'une position d'équilibre stable $\mathbf{x}_{\boldsymbol{eq}}$ **suit le mouvement d'un oscillateur harmonique**.