Introduction

Plutôt que de décrire précisément le mouvement d'un objet à chaque instant. On peut s'intéresser aux échanges d'énergies engendrés par cette transformation.

L'approche énergétique permet alors de déterminer des vitesses ou des positions finales sans décrire la totalité d'un mouvement, ce qui en fait un outil particulièrement efficace pour résoudre des problèmes en mécanique.

Par ailleurs, l'approche énergétique est transverse en physique et les percepts abordées seront repris dans le cours thermodynamique.

I] Première approche : intégrale première du mouvement

1. Exemple n°1 : chute libre ★

Considérons un point matériel en chute libre verticale dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. La 2ème loi de Newton conduit, en projection sur l'axe (Oz) ascendant, à :

$$m\ddot{z} + mg = 0$$

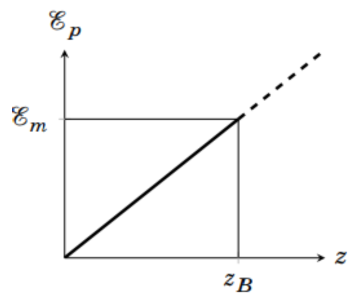
On multiplie l'équation par $\dot{z}$, et on reconnaît la forme d'une dérivée :

$$m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz\right) = 0$$

Que l'on peut primitiver :

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = Cste$$

On nomme les trois termes obtenus **énergie cinétique**, **énergie potentielle** et **énergie mécanique**, ce qui permet de réinterpréter la relation précédente comme un transfert entre deux réservoirs d'une quantité constante :

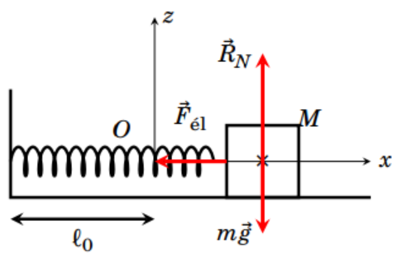


$$E_c(v_z) + E_p(z) = E_m$$

On peut utiliser cette interprétation pour rapidement poser des relations efficaces, en s'appuyant sur une représentation graphique de $E_p(z)$.

2. Exemple n°2 : Oscillateur harmonique ★

On considère un système masse ressort horizontal posé sur un plan horizontal et se déplaçant sans frottements. On choisit la position de l'origine du repère à la position de la longueur à vide. La 2ème loi de Newton, projetée sur l'axe Ox, conduit à :



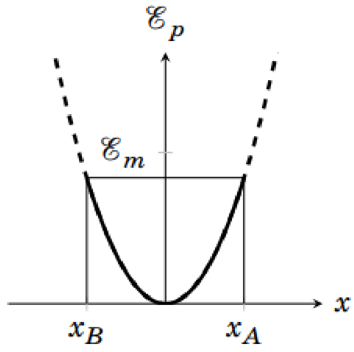
$$m\ddot{x} + kx = 0$$

On multiplie l'équation par $\dot{x}$, et on reconnaît la forme d'une dérivée :

$$m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \Rightarrow E_c(v_x) + E_p(x) = E_m$$

Avec :

$$E_c(v_x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad ; \quad E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad ; \quad E_m = cste$$



On peut à nouveau interpréter ce mouvement en termes d'énergie cinétique et potentielle, qui se répartissent une quantité totale d'énergie fixée par les conditions initiales.

En écartant le ressort de sa position d'équilibre d'une distance a et en le lachant sans vitesse initiale, on peut dessiner le graphe de $E_p(x)$.

3. Conclusion

Pour certains mouvements, on peut interpréter l'évolution comme **un transfert d'énergie mécanique** entre deux réservoirs : celui **d'énergie cinétique** (toujours positive) et celui **d'énergie potentielle** (qui dépend des actions mécaniques mises en jeu).

II] Théorème de l'énergie cinétique

1. Définition de l'énergie cinétique

On considère un système point matériel M de masse **m** dont le mouvement est décrit dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, soumis à des forces de résultante $\vec{F}$. Ecrivons la 2ème loi de Newton :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v} = \vec{F} \bullet \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2\right) = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m, en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2}$$

L'énergie cinétique est homogène à une énergie $M.L^2.T^{-2}$ et son unité **SI** est le Joule **J**.

2. Puissance d'une force

On appelle puissance exercée par la force $\vec{F}$ sur le point **M** animé par la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$:

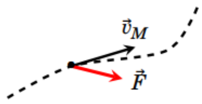
$$\boxed{P_{\vec{F}\to M} = \vec{F} \bullet \vec{v}}$$

La puissance est homogène à $M.L^2.T^{-3}$. Son unité dans le **SI** est le **Watt** (W, $1\,W = 1\,J.s^{-1}$)

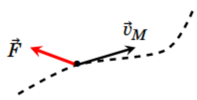
3. Force motrice et résistante

La présence d'un produit scalaire conduit à plusieurs cas :

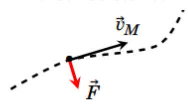
- Soit la force et le mouvement vont dans le même sens ($P > 0$) : la force est **motrice.**
- Soit la force et le mouvement vont dans un sens opposé ($P < 0$) : la force est **résistante.**
- Soit la force et le mouvement sont orthogonaux ($P = 0$) : La force **ne travaille pas**.



Force motrice



Force résistante



Force ne travaillant pas

Application : La luge.

*On considère une luge glissant avec frottements solide de coefficient **f** sur une pente d'angle α avec l'horizontale.*

***1)** Faire un schéma et représenter les forces s'exerçant sur la luge.*

***2)** En déduire la nature motrice ou résistante de ces forces.*

Solution :

4. Travail d'une force le long d'un chemin

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ appliquée au point **M** au cours du déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est défini par :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{dOM}}$$

Le travail est homogène à une énergie $M.L^2.T^{-2}$. Son unité dans le **SI** est le **J.**

On définit le travail global fourni par une force à un point matériel entre deux positions A et B le long de sa trajectoire **(**AB**)** en sommant les contributions des travaux élémentaires :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \int_{M \in AB} \delta W(\vec{F}) = \int_{M \in AB} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dOM}}$$

Remarques :

- *Le travail représente l'énergie cédée au système par la force $\vec{F}$ entre les points **A** et **B**.*

- *Le travail d'une force peut s'exprimer en fonction de la puissance et inversement.*

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{dOM} = \vec{F} \bullet \vec{v}dt = P_{\vec{F} \to M}dt$$

- *La notation δW et non dW pour le travail élémentaire vient d'une propriété particulière: **il dépend a priori du chemin suivi par le point matériel (cf. II.1)**. Il ne dépend donc pas seulement de la position de ce dernier (son état). D'où $\int_{M \in AB} \delta W(\vec{F})$ ne dépend pas que des états A et de B. En conséquence, on ne peut pas écrire cette intégrale avec une primitive simple de $\delta W(\vec{F})$.*

- *Dans le cas d'une **force constante**, le calcul se simplifie et donne :*

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_{M \in AB} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dOM} = \vec{F} \bullet \int_{M \in AB} \overrightarrow{dOM} = \vec{F} \bullet (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{AB}$$

5. <u>Théorème de l'énergie et de la puissance cinétique</u> ★

On a montrer ***(II.1.)*** que la dérivée temporelle de l'énergie cinétique est égale à la puissance de la force résultante, ce résultat se généralisé à plusieurs forces, il est appelé le **théorème de la puissance cinétique** :

$$\boxed{TPC:\ \frac{dE_c}{dt} = \sum P}$$

En intégrant entre deux états **A** et **B**, il vient le **théorème de l'énergie cinétique :**

$$dE_c = \sum P\, dt \ \Rightarrow \ \int_A^B dE_c = \sum \int_A^B \vec{F} \bullet \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt}\, dt = \sum \int_A^B \delta W(\vec{F})$$

$$\boxed{TEC:\ \Delta_{AB}E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}(\vec{F})}$$

*<u>Remarque :</u> Il faut tenir compte du travail de toutes les forces appliquées au système, y compris les forces intérieures (**Si le système est indéformable, alors** $W_{\vec{F}_{int}} = 0$).*

<u>Application :</u> Le curling.

Un palet glisse sur un support horizontal avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{U_x}$ (état initial A, position initiale choisie en $x_A = 0$). Il est soumis de la part du support à une force de frottements secs opposée à sa vitesse de glissement et de norme $R_T = fR_N$ d'après les lois de Coulomb. Cette force arrête le palet en B.

***1)** Faire un schéma. Représenter les forces.*

***2)** Déterminer les travaux des forces entre **A** et **B**.*

***3)** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la position d'arrêt x_B.*

<u>Solution :</u>

<u>2)</u>

$$W_{AB}(\vec{P}) = 0$$

$$W_{AB}(\overrightarrow{R_N}) = 0$$

$$W_{AB}(\overrightarrow{R_T}) = -fmgx_B$$

3)

$$\Delta_{AB}E_c = E_c(B) - E_c(A) = -\frac{1}{2}mv_0^2 = -fmgx_B$$

$$x_B = \frac{v_0^2}{2fg}$$

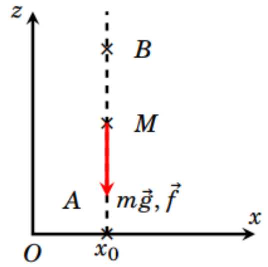
III] Energie potentielle et forces conservatives

1. Forces conservatives

Une force $\vec{F}$ est **conservative** si le travail $W_{AB}(\vec{F})$ ne dépend pas du chemin suivi de **A** à **B**.

Exemple : *Elévation d'une masse.*

On considère un point, soumis à son poids, à une force de traînée (modèle linéaire), qui effectue un trajet entre $A(x_0, 0, 0)$ *et* $B(x_0, 0, z_B)$*.*



a) *Déterminons le travail du poids (force constante) :*

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = -mgz_B$$

Cette expression est valable quel que soit le chemin suivi par le système, elle ne dépend que des coordonnées des points A et B.

b) *Calculons le travail de la force de trainée linéaire (force non constante) :*

$$\delta W(\vec{f}) = -\lambda \vec{v} \cdot \overrightarrow{dOM} \quad \Rightarrow \quad W_{(AB)}(\vec{f}) = -\lambda \int_{M \in AB} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

On constate qu'on ne peut pas finir le calcul de l'intégrale sans connaître les lois horaires, puisqu'on ne connaît pas la fonction $\vec{v}(t)$*. Pour finir le calcul, prenons deux chemins :*

- *Une élévation uniforme entre* **A** *et* **B** *:* $z(t) = v_0 t$*.*

$$W_{(AB)}(\vec{f}) = -\lambda \int_0^{z_B} v_0 dz = -\lambda v_0 z_B$$

- *Une élévation uniformément accélérée entre* **A** *et* **B** *:* $z(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$*.*

$$W_{(AB)'}(\vec{f}) = -\lambda \int_0^{z_B} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dOM} = -\lambda \int_0^{z_B} a_0 t dz = -\lambda \int_0^{z_B} \sqrt{\frac{2z}{a_0}} dz = -\lambda \sqrt{\frac{2}{a_0}} \int_0^{z_B} \sqrt{z} dz$$

$$W_{(AB)'}(\vec{f}) = -\lambda \sqrt{\frac{2}{a_0}} \times \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right]_0^{z_B} = -\lambda z_B \sqrt{\frac{4z_B}{3a_0}} \neq W_{(AB)}(\vec{f})$$

Le travail dépend du chemin suivi, la force de frottement fluide n'est pas conservative.

Conséquence : *Le travail d'une force conservative* $\vec{F_c}$ *sur n'importe quel chemin fermé (c'est-à-dire qui revient à sa position initiale) est nécessairement nul :*

$$W_{AA}(\vec{F_c}) = \int_{M \in AA} \vec{F_c} \cdot \overrightarrow{dOM} = \oint \vec{F_c} \cdot \overrightarrow{dOM} = 0$$

Pour montrer qu'une force est non conservative, il est possible de calculer son travail sur un chemin fermé : si ce travail est non nul, alors elle ne peut pas être conservative.

2. Energie potentielle ★

Pour les forces conservatives $\overrightarrow{F_c}$, on peut définir une grandeur qui ne dépend que des coordonnées du système, appelée **énergie potentielle**, notée E_p, tel que le travail élémentaire de la force s'exprime :

$$\boxed{\delta W(\overrightarrow{F_c}) = -dE_p}$$

<u>Remarque :</u> L'énergie potentielle est définie à partir de sa différentielle. Son expression intégrale est donc valable à une constante additive *près.*

Ainsi, en intégrant la relation précédente, il vient :

$$\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{F_c}) = \int_{M\in AB} \delta W(\overrightarrow{F_c}) = \int_{M\in AB} -dE_p = -[E_p]_A^B = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta_{AB}E_p}$$

3. Force dérivée d'une énergie potentielle ★

Pour une force $\overrightarrow{F_c}$ conservative, le travail élémentaire s'écrit en fonction de la variation infinitésimale de l'énergie potentielle :

$$\delta W(\overrightarrow{F_c}) = \overrightarrow{F_c} \bullet \overrightarrow{dOM} \quad \Leftrightarrow \quad dE_p = -\overrightarrow{F_c} \bullet \overrightarrow{dOM}$$

a. Cas 1 dimension

Si la force $\overrightarrow{F_c}$ dépend d'une unique coordonnée **x** et est dirigée selon un vecteur de la base $\overrightarrow{U_x}$:

$$\overrightarrow{F_c} = F_x(x)\overrightarrow{U_x} \;\Rightarrow\; dE_p = -F_x(x)dx$$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{F_c} = -\frac{dE_p}{dx}\overrightarrow{U_x}}$$

<u>Application :</u> Etablir les énergies potentielles associées aux forces classiques.

1) *Etablir l'énergie potentielle de pesanteur. (Pour un axe (Oz) orienté vers le haut et vers le bas.)*

2) *Etablir l'énergie potentielle élastique. On choisira un référentiel centré sur l'extrémité du ressort fixée.*

3) *Rappeler l'expression de la force gravitationnelle exercée par une masse m_c située en **C** sur une masse m située en **M**. Etablir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle.*

<u>Solution :</u>

1) *Axe (Oz) orienté vers le haut :*

$$\vec{P} = -mg\overrightarrow{U_z} = -\frac{dE_{pp}}{dz}\overrightarrow{U_z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_{pp}}{dz} = mg$$

$$\boxed{E_{pp+} = mgz + cste}$$

Axe (Oz) orienté vers le bas :

$$\vec{P} = mg\overrightarrow{U_z} = -\frac{dE_{pp}}{dz}\overrightarrow{U_z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_{pp}}{dz} = -mg$$

$$\boxed{E_{pp-} = -mgz + cste}$$

2)

$$\vec{F} = -k(x - l_0)\overrightarrow{U_x} = -\frac{dE_{pp}}{dx}\overrightarrow{U_x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_{pe}}{dx} = k(x - l_0)$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + ctse \quad et \quad E_{pe}(x = l_0) = 0 \Rightarrow \boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2}$$

3)

$$\vec{F} = -G\frac{mm_c}{r^2}\overrightarrow{U_r} = -\frac{dE_{pg}}{dr}\overrightarrow{U_r} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_{pg}}{dr} = G\frac{mm_c}{r^2} \quad \Rightarrow \boxed{E_{pg} = -G\frac{mm_c}{r} + cst}$$

a. Cas 3 dimensions

<u>Outils mathématiques :</u>

La **dérivée partielle** d'une fonction $g(x, y, z)$ par rapport à la variable x, avec y et z maintenues constantes est définie par :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x + \delta x, y, z) - g(x, y, z)}{\delta x}$$

La **différentielle totale** d'une fonction $g(x, y, z)$, notée dg**,** de 3 variables x, y, z indépendantes est définie par :

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{x,y} dz$$

Le **gradient** de cette fonction réelle $g(x, y, z)$ des trois coordonnées d'un point $\mathbf{M}(x, y, z)$ est défini comme le vecteur «accroissement» qui donne la variation de g le long d'un petit déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ **:**

$$dg = \overrightarrow{grad(g)} \bullet \overrightarrow{dOM}$$

La définition de l'opérateur gradient fait intervenir le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ qui dépend du système de coordonnée choisi. Ainsi, on peut expliciter l'expression de l'opérateur gradient :

- En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{grad(f)} = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{U_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{U_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{U_z}$

- En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{grad(f)} = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{U_z}$

- En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{grad(f)} = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{U_\varphi}$

Dans le cas 3 dimensions, revenons à la définition de l'énergie potentielle à partir de sa différentielle : Pour toutes force conservative $\overrightarrow{F_c}$, il existe une fonction $E_p(x,y,z)$ tel que :

$$dE_p = -\overrightarrow{F_c} \bullet \overrightarrow{dOM}$$

D'après la définition du gradient :

$$dE_p = \overrightarrow{grad(E_p)} \bullet \overrightarrow{dOM}$$

D'où :

$$-\overrightarrow{F_c} \bullet \overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{grad(E_p)} \bullet \overrightarrow{dOM}$$

Finalement, il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{F_c} = -\overrightarrow{grad(E_p)}}$$

<u>Application :</u> *Déterminer l'expression d'une force conservative à partir de l'énergie potentielle associée.*

Pour les énergie potentielles proposées, déterminer la force conservative associée.

1) *L'énergie potentielle de pesanteur en coordonnées polaires :* $E_p = -mgrcos(\theta) + cste$.

2) *L''énergie potentielle d'un particule chargée* q *en* ***M****, en interaction coulombienne avec une particule chargée* q_0 *en* ***O****, s'écrit en coordonnées sphériques centrées sur* ***O***

$$E_p = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

<u>*Solution :*</u>

1)

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad(E_p)} = -\overrightarrow{grad(-mgrcos(\theta) + cste\ )}$$

$$\vec{P} = \frac{\partial mgrcos(\theta)}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial mgrcos(\theta)}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{P} = mgcos(\theta)\overrightarrow{U_r} - mgsin(\theta)\overrightarrow{U_\theta}$$

2)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad\left(\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)} = -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\overrightarrow{U_r} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

IV] Energie mécanique

1. Définition

L'énergie mécanique d'un système est la somme de son énergie cinétique et de toutes les énergies potentielles des forces conservatives auxquelles il est soumis :

$$\boxed{E_m = E_c + \sum E_p}$$

2. Théorème de la puissance et de l'énergie et mécanique

On considère un système point matériel M de masse **m** dont le mouvement est décrit dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Ecrivons la 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton en séparant les contributions des forces conservatives et non conservatives :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_C} + \sum \overrightarrow{F_{NC}}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\bullet\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2\right) = \sum \overrightarrow{F_C}\bullet\vec{v} + \sum \overrightarrow{F_{NC}}\bullet\vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}(E_c) = \sum P_C + \sum P_{NC}$$

$$\frac{d}{dt}(E_c) - \sum \overrightarrow{F_C}\bullet\frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} = \sum P_{NC}$$

$$\frac{d}{dt}(E_c) + \sum \frac{dE_p}{dt} = \sum P_{NC}$$

On en déduit le **théorème de la puissance mécanique** :

$$\boxed{TPM:\ \ \frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E_c + \sum E_p\right) = \sum P_{NC}}$$

En intégrant entre deux états **A** et **B**, il vient le **théorème de l'énergie mécanique :**

$$dE_m = \sum P_{NC}\,dt \ \ \Rightarrow\ \ \int_A^B dE_m = \sum \int_A^B \overrightarrow{F_{NC}}\bullet\frac{\overrightarrow{dOM}}{dt}\,dt = \sum \int_A^B \delta W\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)$$

$$\boxed{TEM:\ \ \Delta_{AB}E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)}$$

*<u>Remarque :</u> **L'énergie mécanique se conserve**, c'est-à-dire reste constante si et seulement si **la puissance des forces non conservatives est nulle**.*

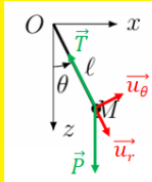
<u>Application :</u> Pendule simple par l'énergie.

*On étudie le pendule simple : une masse ponctuelle **m** est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible sans masse de longueur **ℓ**, que l'on fait osciller dans un plan vertical.*

Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème de la puissance mécanique.

Solution :

Correction :



Le système est la masse ponctuelle.
Le référentiel est le référentiel terrestre suppos galiléen.
On choisi un plan (Oxz) d'oscillation et on repère M avec le repère polaire.
Les forces subies sont le poids $\overrightarrow{P}$ (force conservative) et la tension du fil $\overrightarrow{T}$ (les frottements fluides sont négligés).

L'énergie potentielle associée au poids est égale à $\mathcal{E}_p = -mgz = -mg\ell\cos(\theta)$.
On cherche une équation différentielle donc le TPM est judicieux. On calcule alors la puissance de la force non conservative : $P(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{T}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{T}\|\overrightarrow{u_r}.\ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = 0$.
L'énerige cinétique s'exprime comme : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$.
On applique le théorème de la puissance mécanique à la masse, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &= P^{\text{non conservatives}} \\
&= 0 \\
\Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_p}{dt} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{2}m\ell^2\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} - mg\ell\frac{d\cos\theta}{dt} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{2}m\ell^2\frac{d\dot{\theta}^2}{d\dot{\theta}} \times \frac{d\dot{\theta}}{dt} - mg\ell\frac{d\cos\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\theta} \times \ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta \times \dot{\theta} &= 0 \\
\Rightarrow \ell\dot{\theta} \times \ddot{\theta} + \dot{\theta} \times g\sin\theta &= 0 \\
\dot{\theta} \times \left(\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta\right) &= 0
\end{aligned}$$

Il existe deux solutions :
- $\dot{\theta} = 0\ \forall t$: c'est la position d'équilibre.
- $\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$: c'est l'équation différentielle recherchée.

V] Mouvements conservatifs à une dimension

1. Courbe d'énergie potentielle

Considérons le mouvement conservatif d'un point matériel soumis à des forces conservatives associées à une énergie potentielle totale $E_p(x)$. Notons E_{m0} son énergie mécanique initiale.

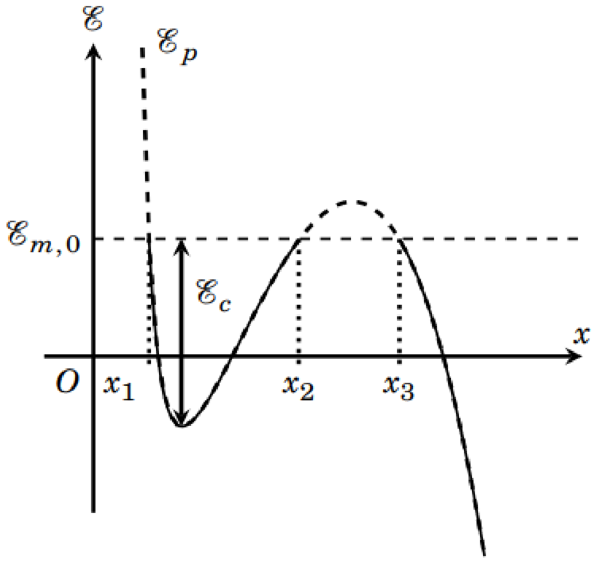
Le théorème de l'énergie mécanique nous garantit alors que $E_m = E_{m0}$ est constante au cours du mouvement. Par la suite, on peut écrire la conservation de l'énergie :

$$E_m = E_c + E_p$$

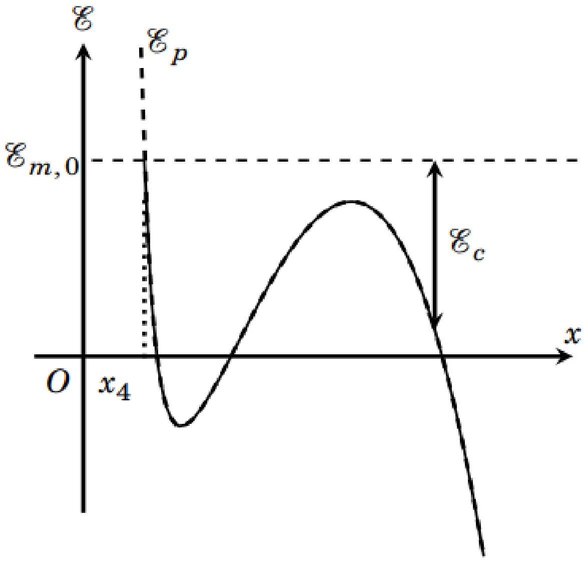
$$E_p(x) = E_{m0} - \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 \leq E_{m0}$$

Le point matériel ne peut accéder qu'aux lieux x où l'énergie potentielle est inférieure à E_{m0}.

Traçons $E_p(x)$ et plaçons diverses possibilités de E_{m0} ci-dessous :



$\mathscr{E}_m < \mathscr{E}_{p,\max}$



$\mathscr{E}_m > \mathscr{E}_{p,\max}$

On distingue deux cas sur les schémas ci-dessus :

- Si dans le cas où E_{m0} est inférieure au col d'énergie potentielle (*graphe de gauche*) et où la particule est initialement entre x_1 et x_2, elle est bloquée entre ces deux positions. On parle **d'état lié**. Le col d'énergie potentielle infranchissable est appelé **barrière de potentiel.** La zone entre deux barrières dont une particule de trop faible énergie ne peut pas s'extraire, on parle de **puits de potentiel**.

- Si la particule peut atteindre la position x_3 (soit parce que son énergie mécanique est suffisante pour passer le col, soit parce qu'elle est initialement de ce côté du col), elle peut s'éloigner indéfiniment. On parle **d'état de diffusion**.

<u>Remarque :</u> *Pour raisonner, on peut voir le diagramme d'énergie potentielle comme un dénivelé, puisque pour l'énergie potentielle de pesanteur,* $E_p = mgz$ *est proportionnelle au dénivelé* z*.*

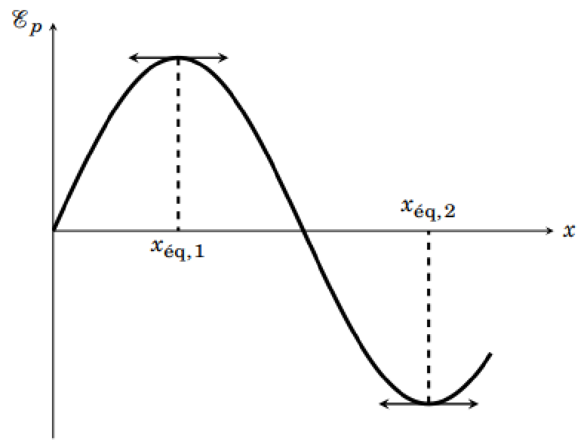
2. <u>Position d'équilibre</u>

Une **position d'équilibre** une position pour laquelle le point matériel subit une force globalement nulle :

$$\boxed{\vec{F}(x = x_{eq}) = \vec{0}}$$

Dans le cas d'un système conservatif à une dimension, il vient :

$$\overrightarrow{F_C} = -\frac{dE_p}{dx}\overrightarrow{U_x} \Rightarrow \boxed{\frac{dE_p}{dx}(x = x_{eq}) = 0}$$



On peut alors séparer deux cas :

• Pour un minimum de E_p, si le point s'éloigne un peu de la position x_{eq}, la force devient non nulle et est orientée vers la position d'équilibre : il s'agit d'une position **d'équilibre stable**.

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_{eq}) > 0$$

• Pour un maximum de E_p, si le point s'éloigne un peu de la position x_{eq}, la force devient non nulle et est orientée à l'opposé de la position d'équilibre : il s'agit d'une position **d'équilibre instable.**

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_{eq}) < 0$$

3. Petits mouvements autour d'un équilibre stable

Soit un système conservatif (sans dissipation) décrit par une variable $x(t)$, évoluant dans un profil d'énergie potentielle $E_p(x)$ et étudions son mouvement autour d'une position d'équilibre x_{eq}.

Par définition de l'équilibre : $\vec{F}(x = x_{eq}) = \vec{0} \Rightarrow \frac{dE_p}{dx}(x = x_{eq}) = 0$.

Par la suite, en réalisant un développement de Taylor de E_p au voisinage de x_{eq}, il vient :

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq})(x - x_{eq})^2 + o\left((x - x_{eq})^2\right)$$

En posant $k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0$ et $X = x - x_{eq}$, l'énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre s'écrit :

$$E_p(X) = \frac{1}{2}kX^2 + Cste + o(X^2)$$

Finalement, au termes négligeables devant X^2 près et en appliquant le théorème de l'énergie mécanique, il vient :

$$\frac{d}{dt}(E_m) = \frac{d}{dt}(E_p + E_c) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kX^2 + \frac{1}{2}m\dot{X}^2\right) = 0$$

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0}$$

Que l'on identifie à la forme canonique d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad avec \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Conclusion : Un système de masse m en mouvement conservatif d'énergie $E_p(X)$ autour d'une position d'équilibre stable x_{eq} **suit le mouvement d'un oscillateur harmonique**.