<u>Théorèmes énergétiques en version intégrale :</u>

□ Exercice 17.1. Marsupilami ★ (TEM)

1 Si l'on néglige les frottements, alors l'énergie mécanique du Marsupilami

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{pp} + E_\mathrm{pe} + E_\mathrm{c}$$

est une constante du mouvement. Son énergie potentielle compte une contribution de pesanteur E_pp et une contribution élastique E_pe. Prenons la position du sol comme référence des énergies potentielles. Lorsqu'il est au sol, queue comprimée, prêt à sauter, l'énergie mécanique du Marsupilami est uniquement de type potentielle élastique,

$$E_\mathrm{m} = 0 + \frac{1}{2}k(\ell_\mathrm{m} - \ell_0)^2 + 0$$

> *Il serait également raisonnable d'inclure une contribution d'énergie potentielle de pesanteur $mg\ell_m$ à l'énergie mécanique, mais cela ne modifierait pas beaucoup le résultat final.*

Au contraire, lorsque le Marsupilami atteint sa hauteur de saut maximale, sa vitesse est nulle et son énergie mécanique n'est plus que de type potentielle de pesanteur,

$$E_\mathrm{m} = mgh + 0 + 0\,.$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique,

$$\frac{1}{2}k(\ell_\mathrm{m} - \ell_0)^2 = mgh \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{k = \frac{2mgh}{(\ell_\mathrm{m} - \ell_0)^2} = 4{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}\,.}$$

2 Lorsque la queue du Marsupilami quitte le sol, sa longueur est égale à sa longueur à vide. Le Marsupilami se trouve donc à une hauteur ℓ_0 au dessus du sol avec une vitesse v. Son énergie mécanique vaut alors

$$E_\mathrm{m} = mg\ell_0 + 0 + \frac{1}{2}mv^2\,.$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique,

$$\cancel{m}gh = \cancel{m}g\ell_0 + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{2g(h - \ell_0)} = 12{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

□ Exercice 17.2. Saut à l'élastique ★★ (TEM)

Posons un axe (Oz) vertical vers le bas, dont l'origine est prise au niveau du pont. La longueur de l'élastique s'identifie donc à la coordonnée z, mais il n'est tendu que si $z > \ell_0$: ce n'est pas un ressort, il n'exerce aucune force lorsqu'il est comprimé.

L'énergie mécanique du sauteur se conserve. En l'exprimant au point de départ ($z = 0$, élastique non tendu, vitesse nulle) et au point le plus bas de la trajectoire ($z = z_\mathrm{max}$, vitesse nulle) on obtient

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{pp} + E_\mathrm{pe} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{départ}}}{=} 0 + 0 + 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{plus bas}}}{=} 0 - mgz_\mathrm{max} + \frac{1}{2}k(z_\mathrm{max} - \ell_0)^2$$

Le saut d'Alice permet de déterminer la raideur de l'élastique,

$$k = \frac{2mgz_\mathrm{max}}{(z_\mathrm{max} - \ell_0)^2} = 37{,}6\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}\,.$$

Déterminons maintenant la position la plus basse atteinte par Bob avec cet élastique, en résolvant l'équation

$$-mgz_\mathrm{max} + \frac{1}{2}kz_\mathrm{max}^2 - kz_\mathrm{max}\ell_0 + \frac{1}{2}k\ell_0^2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}kz_\mathrm{max}^2 - (mg + k\ell_0)z_\mathrm{max} + \frac{1}{2}k\ell_0^2 = 0$$

Son discriminant vaut

$$(mg + k\ell_0)^2 - k^2{\ell_0}^2 = (mg)^2 + 2kmg\ell_0 > 0$$

d'où on déduit (seule la racine positive est pertinente physiquement)

$$z_{\max} = \frac{(mg + k\ell_0) + \sqrt{(mg)^2 + 2kmg\ell_0}}{k} = 91\,\mathrm{m}\,.$$

Bob peut donc **garder le même élastique qu'Alice** pour sauter.

□ Exercice 17.3. Skieur ★★ (Calcul de travaux, TEC)

Schéma figure 1. Compte tenu de l'orientation des forces, il est plus judicieux d'utiliser un repérage incliné le long de la pente.

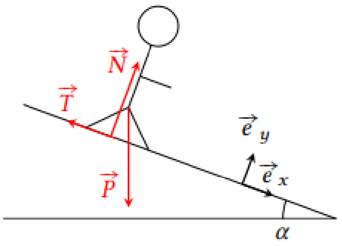


Figure 1 – Schéma du skieur en descente.

$\boxed{1}$ Notons $x = 0$ et $x = L$ les deux extrémités de la piste. Le travail du poids du skieur se calcule simplement,

$$W(\vec{P}) = \int_0^L \vec{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_0^L m\vec{g} \cdot \mathrm{d}x\,\vec{e}_x = mg\sin\alpha \int_0^L \mathrm{d}x \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{W(\vec{P}) = mg\sin\alpha L}$$

Comme la force de réaction normale est perpendiculaire à la pente (donc à la trajectoire), alors elle ne travaille pas, donc

$$W(\vec{N}) = 0$$

Calculons enfin le travail de la force de réaction tangentielle $\vec{T}$. La seule chose que l'on connaisse à son sujet est le lien entre sa norme et celle de N. Comme le skieur demeure sur la piste sans s'enfoncer, alors

$$P_y + N_y = 0 \qquad \text{soit} \qquad -mg\cos\alpha + N = 0 \qquad \text{d'où} \qquad T = \mu mg\cos\alpha$$

Alors,

$$W(\vec{T}) = \int_0^L \vec{T} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{W(\vec{T}) = -\mu mg\cos\alpha L}$$

$\boxed{2}$ Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au skieur entre son point de départ D et son point d'arrivée A,

$$E_c(A) - E_c(D) = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) = mgL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Comme la vitesse initiale du skieur est nulle, et en notant v sa vitesse d'arrivée, on en déduit

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

et finalement

$$\boxed{v = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 18\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 65\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$

□ Exercice 17.4. Convoyeur de colis ★★★ (Calcul de travaux, TEC)

Comme on cherche uniquement les vitesses en deux points (A et B), la version intégrale du théorème de l'énergie cinétique est la méthode à privilégier.

- **Système :** paquet de masse m;
- **Référentiel galiléen :** terrestre;
- **Repérage :** cartésien incliné d'origine A, voir figure 2,

$$\overrightarrow{AM} = x\,\vec{e}_x \qquad \vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x \qquad \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x$$

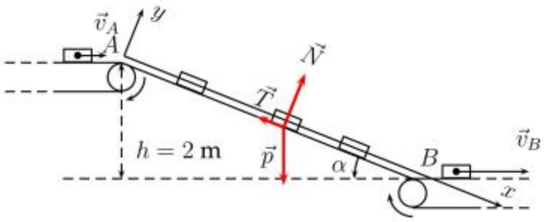


Figure 2 – Glissement d'un paquet sur le convoyeur.

- **Bilan des forces :**

▹ poids $\vec{P}$: sur la trajectoire AB où le colis subit une dénivellation h, le poids et moteur et son travail vaut

$$W_{AB}(\vec{P}) = -\Delta E_{\text{pp}} = +mgh > 0$$

▹ composante normale $\vec{N}$ de la réaction du support, qui ne travaille pas car elle est orthogonale au déplacement

▹ composante tangentielle $\vec{T} = -T\,\vec{e}_x$, dont il faut calculer sa norme, ce qui ne peut se faire que via la norme de $\vec{N}$ et la loi de Coulomb. Appliquons pour ce faire le PFD en projection sur $\vec{e}_y$,

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} \qquad \text{soit} \qquad 0 = N - mg\cos\alpha \qquad \text{d'où} \qquad T = fmg\cos\alpha$$

ce qui permet enfin de calculer le travail de $\vec{T}$,

$$W_{AB}(\vec{T}) = \int_A B\vec{T}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = -fmg\cos\alpha\int_{AB}\mathrm{d}x = -fmg\cos\alpha L$$

où L est la longueur totale du plan incliné. Comme $L = h/\sin\alpha$,

$$W_{AB}(\vec{T}) = -fmg\cos\alpha \times \frac{h}{\sin\alpha} = -\frac{fmgh}{\tan\alpha}\,.$$

- **Théorème de l'énergie cinétique :**

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh - \frac{fmgh}{\tan\alpha}$$

ce qui donne

$$\tan\alpha = \frac{2fmgh}{-mv_B^2 + mv_A^2 + 2mgh}$$

ce qui se simplifie en

$$\tan\alpha = \frac{2fgh}{v_A^2 - v_B^2 + 2gh}$$

et conduit à

$$\tan\alpha = 0{,}4 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\alpha = 22^\circ\,.}$$

Théorèmes énergétiques en version instantanée :

□ Exercice 17.5. Piégeage d'un électron ★ (Force dérivée d'une énergie potentielle, TPM)

L'énergie mécanique est simplement la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{e\,V_0}{d^2} z^2 \,.$$

En négligeant tout phénomène dissipatif (frottement, etc.), elle se conserve, d'où

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{e\,V_0}{d^2} z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TEM}}}{=} 0\,.$$

Comme l'électron se déplace dans le piège, alors sa vitesse n'est pas constamment nulle. On en déduit l'équation du mouvement,

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{e\,V_0}{m\,d^2} z = 0\,.$$

L'équation différentielle que vérifie le mouvement de l'électron est donc celle d'un oscillateur harmonique, dont la fréquence propre vaut

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e\,V_0}{m\,d^2}} = 25 \cdot 10^6\,\mathrm{Hz} = 25\,\mathrm{MHz}}$$

□ Exercice 17.6. Tige avec ressort ★★ (TPC)

1. L'anneau est soumis à son poids (force conservative dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur) et à la force de rappel du ressort (force conservative dérivant de l'énergie potentielle élastique). Il est également soumis à la force de réaction de la tige, mais comme les frottements sont négligeables, cette force ne travaille pas. Ainsi, l'énergie potentielle de l'anneau vaut :

$$\mathcal{E}_p = mgz + \frac{1}{2}k(X-\ell_0)^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{E}_p = mgX\cos\alpha + \frac{1}{2}k(X-\ell_0)^2}$$

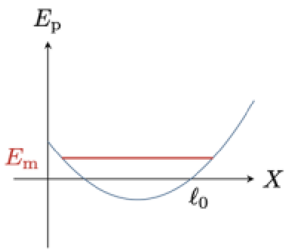
2. Commençons l'étude par calculer la dérivée :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dX} = mg\cos\alpha + k(X-\ell_0)$$

Cette dérivée est nulle en $X = \ell_0 - \dfrac{mg\cos\alpha}{k}$ et on peut facilement s'assurer qu'il s'agit d'un minimum, par exemple en étudiant les limites $X \to \pm\infty$ du polynôme du second degré définissant $\mathcal{E}_p$. L'énergie potentielle minimale vaut alors :

$$\mathcal{E}_{p,\min} = -\frac{(mg\cos\alpha)^2}{2k}$$

ce qui conduit au tracé ci-dessous.



3. Comme l'énergie cinétique est positive ou nulle, le mouvement a lieu dans les zones telles que $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_p$. La figure ci-dessus indique $\mathcal{E}_m > 0$ car la vitesse initiale est non nulle et ℓ_0 est la référence d'énergie potentielle. Par conséquent, tout au long du mouvement :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mV_0^2$$

Les points extrêmes correspondent à une énergie cinétique nulle, c'est-à-dire $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p(X_m)$, soit :

$$\boxed{\frac{1}{2}mV_0^2 = mgX_m\cos\alpha + \frac{1}{2}k(X_m-\ell_0)^2}$$

4. L'énergie mécanique de l'anneau vaut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + mgX\cos\alpha + \frac{1}{2}k(X-\ell_0)^2$$

et comme elle est constante alors :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m\dot{X}\ddot{X} + mg\dot{X}\cos\alpha + k\dot{X}(X-\ell_0) = 0$$

Ce qui permet, en simplifiant par $\dot{X}$, d'aboutir à l'équation du mouvement :

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}\ell_0 - g\cos\alpha$$

On reconnaît comme attendu l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, on en déduit ainsi la période des oscillations :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Exercice 17.7. Mouvement dans un cercle ★★★ (Coordonnées polaires, TPM)

Le système étudié est la bille, modélisée par un point matériel M de masse m, en évolution dans le référentiel terrestre, galiléen.

1 Le point M est soumis à son poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur, et à la réaction du support, qui ne travaille pas : puisqu'il n'y a pas de frottement, seule la composante normale est à prendre en compte. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$E_{pp} = mgz_M + \text{cte} = -mgR\cos\theta + \text{cte}$$

en introduisant de façon très temporaire un axe z vertical ascendant d'origine O. Choisissons dès maintenant la constante en prenant $E_{pp} = 0$ en bas du cercle, c'est-à-dire lorsque $\theta = 0$, ce qui donne

$$E_{pp} = -mgR\cos\theta + mgR = mgR(1-\cos\theta)$$

De plus, comme le mouvement est circulaire, on connaît la vitesse de M d'où on déduit son énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2$$

L'énergie mécanique de la bille est alors une constante du mouvement, qui vaut

$$E_m = -mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2$$

Ainsi,

$$\frac{dE_m}{dt} = mgR\,\dot{\theta}\sin\theta + mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

Comme $\dot{\theta}$ ne peut pas être constamment nul (cela signifierait que la vitesse est toujours nulle, or on sait qu'à $t = 0$ la vitesse de la bille n'est pas nulle), on peut simplifier pour obtenir

$$mR^2\ddot{\theta} + mgR\sin\theta = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

On reconnaît l'équation d'un pendule simple.

2 Le meilleur moyen de déterminer une force inconnue est d'écrire le principe fondamental de la dynamique,

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{N}$$

On utilise ici évidemment le répérage polaire de centre O avec $r = R$ constant, d'où

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \end{cases}$$

$\boxed{3}$ La norme N doit par définition rester positive tout au long du mouvement : si elle s'annule, c'est que le contact entre le support et la bille est rompu. Le premier terme entre crochets est toujours positif. En revanche, le second terme peut prendre des valeurs négatives. La valeur la plus petite qu'il puisse atteindre, lorsque $\cos\theta = -1$, est $-5g$. Ainsi, la bille ne décolle pas du support si

$$\frac{{v_0}^2}{R} - 5g > 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_0 > v_{\min} = \sqrt{5gR}}$$

$\boxed{4}$ Supposons $v_0 < v_{\min}$, et cherchons l'angle θ pour lequel la norme de N s'annule,

$$\frac{{v_0}^2}{R} + g\,(3\cos\theta - 2) = 0$$

$$3g\cos\theta = 2g - \frac{{v_0}^2}{R}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{{v_0}^2}{3gR}$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{{v_0}^2}{3gR}\right)}$$

car $\overrightarrow{N}$ est orientée selon $-\overrightarrow{u_r}$. L'équation projetée sur $\overrightarrow{u_\theta}$ donne l'équation du mouvement, déterminée énergétiquement, alors que l'équation projetée sur $\overrightarrow{u_r}$ donne accès à la norme N,

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta\,.$$

Or on a montré précédemment que

$$E_\mathrm{m} = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 \qquad \text{d'où} \qquad mR\dot{\theta}^2 = \frac{2}{R}E_\mathrm{m} + 2mg(\cos\theta - 1)$$

Ainsi,

$$N = 2RE_\mathrm{m} + mg(3\cos\theta - 2)\,.$$

Enfin, comme l'énergie mécanique est une constante du mouvement, sa valeur est toujours égale à sa valeur initiale. Comme on a **déjà** choisi la référence d'énergie potentielle en bas du cercle, alors

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c}(0) + E_\mathrm{p}(0) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0$$

> *Il est absolument indispensable de garder la même référence d'énergie potentielle tout au long de l'exercice. En effet, E_m est définie à une constante additive près, ce qui n'est pas le cas de la force. Changer malencontreusement de constante en cours de route ferait apparaître la différence entre les constantes dans l'expression de la force, ce qui n'a aucun sens.*

Cette expression donne finalement le résultat escompté,

$$\boxed{N = m\left[\frac{{v_0}^2}{R} + g\,(3\cos\theta - 2)\right]}$$