

I] Cadre de l'étude**1. Cadre de la mécanique classique**

La **mécanique** est le domaine de la physique qui s'intéresse **aux mouvements et à leurs causes**.

On distingue :

- La **cinématique**, qui donne les outils nécessaires à la description du mouvement.
- La **dynamique**, qui relie le mouvement à ses causes, les actions mécaniques.
- L'**énergétique** qui donne un point de vue complémentaire en interprétant le mouvement du système à partir de ses échanges d'énergie avec l'extérieur.

*Remarque : La **mécanique classique**, ou de Newton, est valable tant que la vitesse des systèmes étudiés est faible devant celle de la lumière. Dans ce cadre, on considère que :*

- Le **temps est absolu** : les intervalles de temps sont les mêmes quelque soit le référentiel d'observation.
- Les **distances sont absolues** : les distances sont les mêmes quelque soit le référentiel d'observation.
- Le **mouvement est relatif**.

Dans le cas où $v \approx c$, il faut utiliser la mécanique relativiste, développée par Einstein en 1905.

En mécanique relativiste, on postule que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels. Ainsi le temps et les longueurs ne sont plus absolus (cf. dilatation des durée et contraction des longueurs).

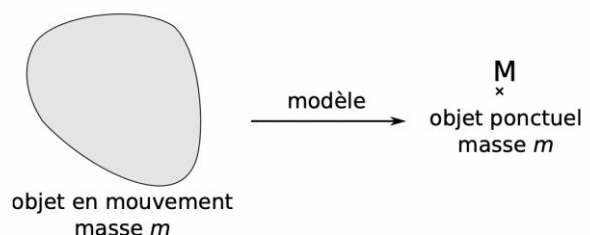
2. Systèmes : point matériel et solide

Dans le cours de mécanique, nous étudierons le mouvement de deux types de systèmes : **les points matériels et les solides**.

Un **solide** est un **système matériel indéformable** dont la distance entre deux points quelconque du système reste constante.

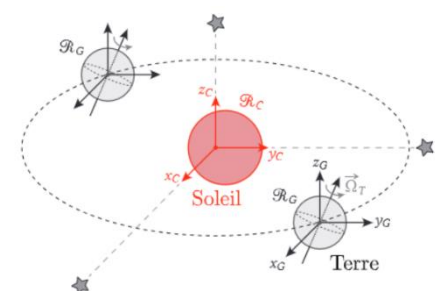
- Exemples : Une chaise, une boule de billard..
- Contre-exemples : une voiture, un ballon de football, un ressort...

Le **modèle du point matériel** (ou de la masse ponctuelle) consiste à décrire le mouvement d'un objet en le représentant par un seul de ses points. Généralement, il s'agit du centre de gravité (ou centre de masse) du système. On associe alors au point matériel une grandeur positive appelée masse et notée « **m** ».

**3. Référentiel d'observation**

Pour décrire un mouvement il faut « une référence » de temps et d'espace appelé **référentiel** défini par :

- un **repère d'espace** : Une origine fixe O et trois directions fixes.
- un **repère de temps** : Une horloge.



	Référentiel de Kepler (héliocentrique)	Référentiel géocentrique	Référentiel terrestre (ou référentiel du laboratoire)
Centre	Centre de gravité S du Soleil (quasiment confondu avec le centre du système solaire) Remarque : Référentiel de Copernic : centre est le centre de gravité du système solaire.	Centre T de la Terre	Un point O à la surface de la Terre.
Axes	Axes S_x, S_y, S_z dirigés vers 3 étoiles lointaines considérées comme fixes.	Axes T_x, T_y, T_z parallèles respectivement à S_x, S_y, S_z (directions fixes, ne suivent pas le mouvement de rotation de la Terre)	Directions fixes suivant la Terre dans son mouvement dont une définissant la verticale au lieu considéré.
Utilisation	Étude des mouvements des planètes autour du Soleil	Étude des mouvements des satellites autour de la Terre	Étude des mouvements à la surface de la Terre

II] Outils pour la description d'un mouvement

1. Décrire la position

Le **vecteur position** d'un point M dans un référentiel $\mathcal{R}$, avec O fixe, est le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

La **trajectoire** d'un point M est la courbe de l'ensemble des positions occupées par M au cours du temps.

2. Vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse** du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ est le vecteur :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

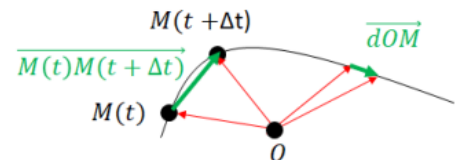
Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à chaque instant à la trajectoire du point M .

La norme $\|\vec{v}\|$ du vecteur vitesse s'exprime en m.s^{-1} .

3. Vecteur déplacement élémentaire

Entre t et $t + \Delta t$, le point M se déplace de $\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)$.

Pour une durée Δt qui devient très petite, on définit le **vecteur déplacement élémentaire** : $d\overrightarrow{OM} = \vec{v}(M/\mathcal{R})dt$



Le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est toujours tangent à la trajectoire.

4. Vecteur accélération

Le **vecteur accélération** du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ est le vecteur :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}}$$

La norme $\|\vec{a}\|$ du vecteur accélération s'exprime en m.s^{-2} .

III] Système de coordonnées cartésiennes**1. Description du système de coordonnées cartésiennes**

Animation système de coordonnées Cartésiennes :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr//Meca/Cinematique/coord_cartesiennes.php

Les coordonnées cartésiennes du point **M** sont les trois distances algébriques **x**, **y** et **z**.

La base cartésienne $(\vec{U}_x, \vec{U}_y, \vec{U}_z)$ est **orthonormée directe** :

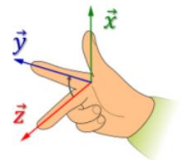
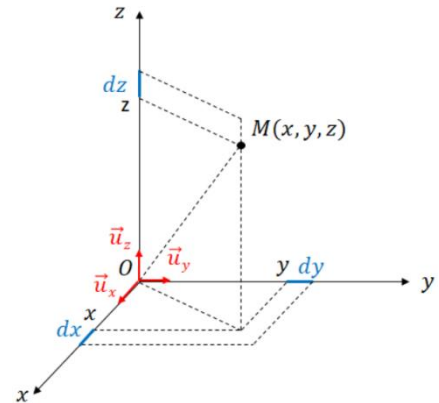
- « **Ortho** » : $\vec{U}_x \perp \vec{U}_y$ et $\vec{U}_x \perp \vec{U}_z$ et $\vec{U}_y \perp \vec{U}_z$

Les vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux.

- « **Normée** » : $\|\vec{U}_x\| = \|\vec{U}_y\| = \|\vec{U}_z\| = 1$

Les vecteurs de la base sont de norme 1.

- « **Directe** » : $\vec{U}_x \wedge \vec{U}_y = \vec{U}_z$. La direction du 3^{ème} vecteur est donnée avec la règle de la main droite. Sur cette main, le pouce représente le 1^{er} vecteur, l'index représente le 2^{ème} vecteur et le majeur représente la direction du 3^{ème} vecteur.



Le vecteur position $\vec{OM}$:	Le vecteur vitesse $\vec{v}$:	Le vecteur accélération $\vec{a}$:
$\vec{OM} = x\vec{U}_x + y\vec{U}_y + z\vec{U}_z$	$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{U}_x + \dot{y}\vec{U}_y + \dot{z}\vec{U}_z$	$\vec{a} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{U}_x + \ddot{y}\vec{U}_y + \ddot{z}\vec{U}_z$

Remarque : On exprime aussi le vecteur déplacement élémentaire à partir du vecteur vitesse :

$$d\vec{OM} = \vec{v} dt = dx\vec{U}_x + dy\vec{U}_y + dz\vec{U}_z$$

IV] Système de coordonnées polaires et cylindriques

Animation système de coordonnées polaires :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr//Meca/Cinematique/coord_cartesiennes.php

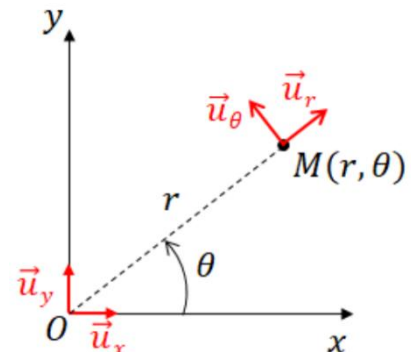
1. Description du système de coordonnées polaires

Les coordonnées polaires du point **M** sont :

- La distance entre l'origine **O** et **M** : $r = \|\vec{OM}\|$.
- L'angle $\theta = (\vec{U}_x, \vec{OM})$.

La base polaire $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$:

- Le vecteur $\vec{U}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$, unitaire et dans le sens de $\vec{OM}$.
- Le vecteur $\vec{U}_\theta$ unitaire, orthogonal à $\vec{U}_r$ est dans le sens des θ croissants.



La base polaire est locale (ou mobile), les vecteurs $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$ se déplace avec le point **M**.

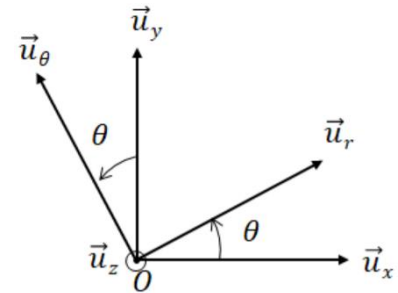
Si **M** n'est pas immobile, on a $\vec{U}_r(t)$ et $\vec{U}_\theta(t)$.

Application : Expressions des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaire :

1) A l'aide du schéma ci-dessus, déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires.

2) A l'aide du schéma ci-contre, exprimer les vecteurs $\overrightarrow{U}_r$ et $\overrightarrow{U}_\theta$ dans la base cartésienne $(\overrightarrow{U}_x, \overrightarrow{U}_y)$.

3) Calculer $\frac{d\overrightarrow{U}_r}{dt}$ et $\frac{d\overrightarrow{U}_\theta}{dt}$ en fonction de $\dot{\theta}$, $\overrightarrow{U}_x$ et $\overrightarrow{U}_y$ puis en fonction de $\dot{\theta}$ et $\overrightarrow{U}_\theta$.



4) En déduire l'expression des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ en coordonnées polaires.

Solution :

1) Le vecteur position en coordonnées polaires est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U}_r$$

2)

$$\overrightarrow{U}_r = \cos(\theta)\overrightarrow{U}_x + \sin(\theta)\overrightarrow{U}_y \quad \text{et} \quad \overrightarrow{U}_\theta = -\sin(\theta)\overrightarrow{U}_x + \cos(\theta)\overrightarrow{U}_y$$

3)

$$\frac{d\overrightarrow{U}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos(\theta)\overrightarrow{U}_x + \sin(\theta)\overrightarrow{U}_y) = \dot{\theta} \times (-\sin(\theta)\overrightarrow{U}_x + \cos(\theta)\overrightarrow{U}_y) = \dot{\theta} \overrightarrow{U}_\theta$$

$$\frac{d\overrightarrow{U}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin(\theta)\overrightarrow{U}_x + \cos(\theta)\overrightarrow{U}_y) = \dot{\theta} \times (-\cos(\theta)\overrightarrow{U}_x - \sin(\theta)\overrightarrow{U}_y) = -\dot{\theta} \overrightarrow{U}_r$$

4) On en déduit l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\overrightarrow{U}_r) = \dot{r}\overrightarrow{U}_r + r\frac{d}{dt}(\overrightarrow{U}_r)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{U}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{U}_\theta$$

Et l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ en coordonnées polaires :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\overrightarrow{U}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{U}_\theta) = \ddot{r}\overrightarrow{U}_r + \dot{r}\frac{d}{dt}(\overrightarrow{U}_r) + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{U}_\theta + r\ddot{\theta}\overrightarrow{U}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d}{dt}(\overrightarrow{U}_\theta)$$

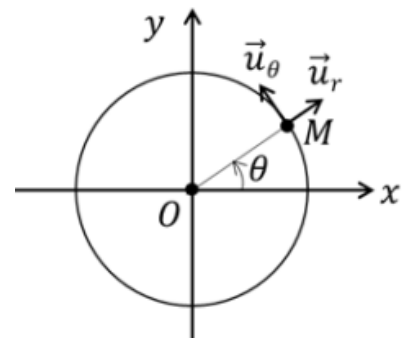
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{U}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{U}_\theta$$

2. Cas particulier des mouvements circulaire et circulaire uniforme

Bien souvent dans les exercices, on considère le mouvement d'un point M décrivant un cercle de rayon $R = \text{cste}$, on parle de mouvement **circulaire**. Dans ce cas, les expressions des vecteurs vitesse et accélérations se simplifient :

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{U}_\theta$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{U}_r + R\ddot{\theta} \vec{U}_\theta = -\frac{v^2}{R} \vec{U}_r + R\ddot{\theta} \vec{U}_\theta \quad \text{avec } v = \|\vec{v}\| = R\dot{\theta}$$



Dans le cas d'un mouvement circulaire, le vecteur accélération possède une composante normale à la trajectoire proportionnelle au carré de la norme de la vitesse radiale et une composante tangente à la trajectoire.

Animation sur le mouvement circulaire accéléré :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr//Meca/Cinematique/circ_accelere_FJ.php

Si de plus le mouvement est **uniforme** $\|\vec{v}\| = \text{cste}$, le vecteur accélération se simplifie :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{U}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{U}_r$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire et uniforme, le vecteur accélération possède seulement une composante normale à la trajectoire.

Animation sur le mouvement circulaire uniforme :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr//Meca/Cinematique/circ_unif_FJ.php

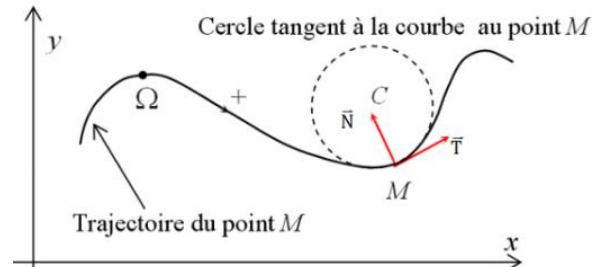
3. Du système de coordonnées polaires à la base de Frenet

Pour l'étude d'un mouvement plan dont on connaît la trajectoire, il peut être intéressant d'utiliser la base de Frenet (Jean-Baptiste Frenet (1816-1900), mathématicien, astronome français).

La base de Frenet est constituée de **deux vecteurs unitaires orthogonaux entre eux**, notés $\vec{T}$ et $\vec{N}$. Les deux vecteurs sont liés au point M dont on décrit le mouvement.

- $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire au point M et dirigé dans le sens du mouvement.

- $\vec{N}$ est orthogonal à $\vec{T}$ et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la courbe.



Dans la base de Frenet, les vecteurs vitesse et accélération prennent la forme suivante :

$$\boxed{\vec{v} = v \vec{T}} \text{ et } \boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{N} + \frac{dv}{dt} \vec{T}} \text{ avec } v = \|\vec{v}\|$$

Remarque : Il ne faut pas confondre la base de Frenet et la base polaire. Le vecteur $\vec{T}$ est toujours tangent à la trajectoire, ce qui n'est pas le cas de $\vec{U}_\theta$ sauf pour un mouvement circulaire. Le vecteur $\vec{U}_r$ est dans la direction et le sens de $\vec{OM}$, ce qui n'est pas le cas du vecteur $\vec{N}$ qui est toujours dirigé vers la concavité de la courbe.

4. Du système de coordonnées polaires au système de coordonnées cylindriques

A partir du système de coordonnées polaires (2D) on peut construire le système de coordonnées cylindrique (3D) en **ajoutant une coordonnée cartésienne d'altitude : « z »**.

Ainsi, on forme la base cylindrique orthonormée directe : $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_z)$

Le vecteur position $\vec{OM}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{OM} = r \vec{U}_r + z \vec{U}_z}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$:

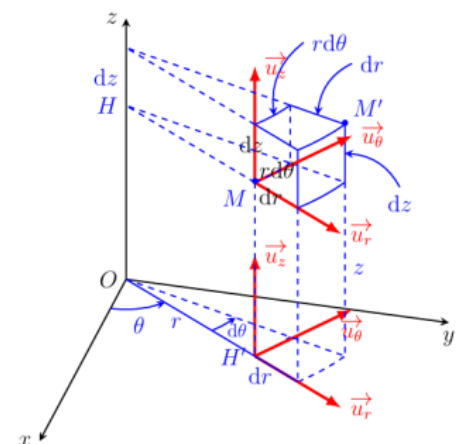
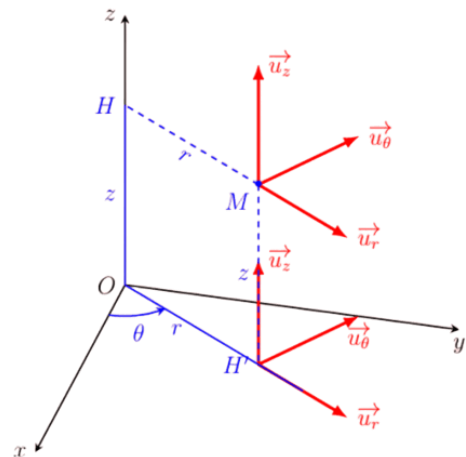
$$\boxed{\vec{v} = \dot{r} \vec{U}_r + r \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{z} \vec{U}_z}$$

Le vecteur accélération $\vec{a}$:

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{U}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{U}_\theta + \ddot{z} \vec{U}_z}$$

Finalement le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$\boxed{d\vec{OM} = \vec{v} dt = dr \vec{U}_r + r d\theta \vec{U}_\theta + dz \vec{U}_z}$$



V] Système de coordonnées sphériques

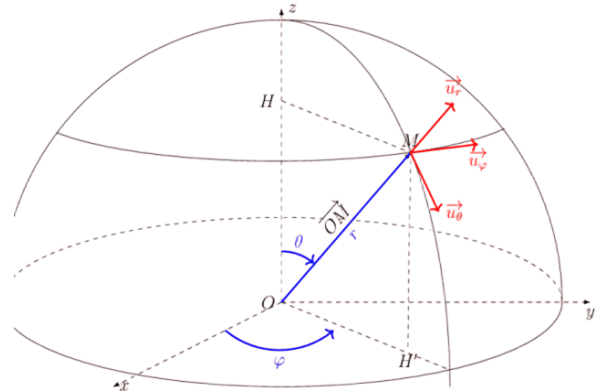
Animation système de coordonnées sphériques :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr//Meca/Cinematique/coord_spheriques.php

Le repérage sphérique d'un point **M** dans l'espace utilise la distance $r = \overline{OM}$ au centre **O** du repère et deux angles θ et φ , respectivement la colatitude et la longitude.

Les coordonnées sphériques du point **M** sont :

- La distance $OM : r = \|\overline{OM}\|$.
- L'angle $\theta = (\overline{U_z}, \overline{OM})$, $\theta \in [0, \pi]$.
- L'angle $\varphi = (\overline{U_x}, \overline{OH'})$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, H' est le projeté orthogonal de **M** sur le plan **(Oxy)**.



La base sphérique $(\overline{U_r}, \overline{U_\theta}, \overline{U_\varphi})$:

- Le vecteur $\overline{U_r} = \frac{\overline{OM}}{r}$, unitaire et dans le sens de $\overline{OM}$.
- Le vecteur $\overline{U_\theta}$ est orthogonal à $\overline{U_r}$, tangent au méridien passant par **M** et orienté dans le sens des θ croissants.
- Le vecteur $\overline{U_\varphi}$ est orthogonal à $\overline{U_r}$ et $\overline{U_\theta}$ tangent au parallèle passant par **M** et orienté dans le sens des φ croissants.

Le vecteur position $\overline{OM}$ s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\overline{OM} = r\overline{U_r}$$

Remarque : Comme pour le système de coordonnées cylindrique, on peut exprimer les vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées sphériques. Cependant les expressions sont lourdes. Ainsi, on se contentera de démontrer l'expression du vecteur déplacement unitaire.

Application : Expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées sphériques.

- 1) Représenter sur le schéma un déplacement élémentaire de **M** dans la direction de $\overline{U_r}$ quand seul r varie de dr (θ et φ sont constants). Donner l'expression de $d\overline{OM}$?
- 2) Représenter sur le schéma un déplacement élémentaire de **M** dans la direction de $\overline{U_\theta}$ quand seul θ varie de $d\theta$ (r et φ sont constants). Donner l'expression de $d\overline{OM}$?
- 3) Représenter sur le schéma un déplacement élémentaire de **M** dans la direction de $\overline{U_\varphi}$ quand seul φ varie de $d\varphi$ (r et θ sont constants). Donner l'expression de $d\overline{OM}$?
- 4) En déduire l'expression du déplacement élémentaire $d\overline{OM}$ en coordonnées sphériques.

Correction :

1)

$$d\vec{OM} = dr \vec{U}_r$$

2)

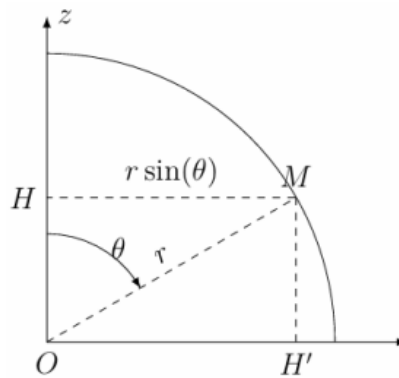
$$d\vec{OM} = r d\theta \vec{U}_\theta$$

3)

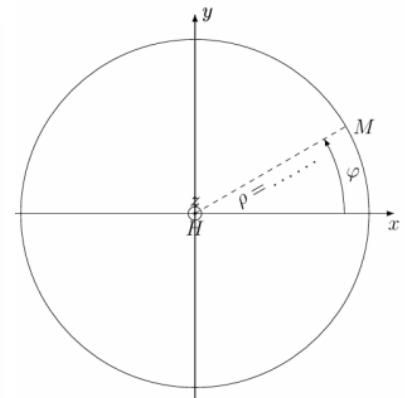
$$d\vec{OM} = r \sin(\theta) d\varphi \vec{U}_\varphi$$

4)

$$d\vec{OM} = dr \vec{U}_r + r d\theta \vec{U}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{U}_\varphi$$



Dans le plan du méridien



Vue de dessus, dans le plan du parallèle

VI] Choisir le système de coordonnées adapté

Il est légitime de choisir n'importe quel système de coordonnées. Les considérations menées à partir de tous les systèmes de coordonnées seront correctes. Néanmoins, l'utilisation d'un système de coordonnées ou d'un autre peut considérablement alléger ou alourdir les calculs.

Si **un axe est privilégié**, notamment si le mouvement présente une distance constante à cet axe, il vaut mieux abandonner les coordonnées cartésiennes pour les **coordonnées cylindriques**.

Si **un point joue un rôle particulier**, les **coordonnées sphériques** peuvent simplifier la situation.

En dehors de ces cas, les **coordonnées cartésiennes** représentent a priori le meilleur choix.

Application : Choisir le bon système de coordonnées.

Dans les situations ci-dessous (que nous rencontrerons au fur et à mesure des chapitres), choisir le système de coordonnées adapté.

1) Descente d'un skieur sur une piste rectiligne inclinée d'un angle par rapport à l'horizontal.

2) Mouvement circulaire d'un satellite autour de la Terre.

3) Mouvement d'un point matériel accroché à un fil de longueur constante, lui même accroché à un point fixe du référentiel d'étude.

Correction :

1) Cartésien.

2) Sphérique.

3) Cylindrique.

VII] Complément sur les trajectoires: les coniques

Par définition, **les coniques** sont les sections d'un cône de révolution par un plan ne passant pas par son sommet, Il existe trois formes différentes : **l'ellipse**, **la parabole** et **l'hyperbole**.

Animation sur les coniques : <https://www.geogebra.org/m/yvmuuvx9#material/ccfsaRq3>

L'équation polaire d'une conique avec origine au foyer s'écrit :

$$r(\theta) = \frac{p}{e \times \cos(\theta) \pm 1}$$

- $p > 0$ est le paramètre de la conique.
- $e \geq 0$ est l'excentricité de la conique.

Nom	Equation cartésienne	Equation polaire	Illustration
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a le demi-grand axe. b le demi-petit axe.	$r = \frac{p}{1 + e \times \cos(\theta)}$ $p > 0$ le paramètre de l'ellipse. $0 \leq e < 1$ l'excentricité de l'ellipse.	
Parabole	$y^2 = 2px$ $p > 0$ le paramètre de la parabole.	$r = \frac{p}{1 + \cos(\theta)}$ Rq : l'excentricité d'une parabole vaut $e = 1$.	
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a le demi-grand axe. b le demi-petit axe.	$r_{\pm} = \frac{p}{e \times \cos(\theta) \pm 1}$ $p > 0$ le paramètre de l'hyperbole. $e > 1$ l'excentricité de l'hyperbole	