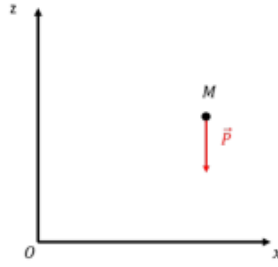


DM n°6 : Mécanique du point

Exercice 1 : Avion en chute libre

1. Voir le schéma ci-dessous.



2. Système : Avion assimilé à un point matériel M de masse m .

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Repère d'espace : celui de la figure ci-dessus.

Repère de temps : $t = 0$ quand l'avion est en B .

Bilan des forces extérieures : $\left\{ \begin{array}{l} \text{le poids : } \vec{P} = -mg\vec{u}_z \\ \text{frottements négligés} \end{array} \right.$

On cherche l'équation de la trajectoire, on utilise donc le PFD. D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{g}$$

Exprimé avec les coordonnées : $\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{array} \right.$

($\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$; $\dot{z}(0) = v_0 \sin \alpha$) , cela donne : $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{array} \right.$

3. En intégrant pour obtenir les équations horaires (conditions initiales $x(0) = 0$ et $z(0) = z_B$), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = v_0 \cos \alpha t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + z_B \end{array} \right.$$

4. On obtient : $z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x + z_B$

C'est l'équation d'une parabole.

5. Le sommet de la parabole d'équation $z = ax^2 + bx + c$ se trouve en $x_s = -\frac{b}{2a}$ (c'est l'abscisse annulant la dérivée $\frac{dz}{dx}$).

Donc $x_s = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{v_0^2 \times \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$, soit :

$$x_s = \frac{v_0^2}{2g} \times \sin(2\alpha)$$

L'ordonnée du sommet est alors :

$$z(x_s) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} \times \left(\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 + \frac{\tan \alpha \times v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} + z_B$$

soit

$$z(x_s) = -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + z_B = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + z_B$$

A.N : $Z_5 = 8,5 \text{ km}$

6. On cherche l'instant où l'avion retourne en z_B , c'est-à-dire l'instant où :

$$-\frac{1}{2}gt_{BSC}^2 + v_0 \sin \alpha t_{BSC} + z_B = z_B \Rightarrow -\frac{1}{2}gt_{BSC}^2 + v_0 \sin \alpha t_{BSC} = 0$$

donc $-\frac{1}{2}gt_{BSC} + v_0 \sin \alpha = 0$ soit :

$$t_{BSC} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 29 \text{ s}$$

Exercice 2 : Chute sur corde en escalade

1. La vitesse maximale est atteinte au point 2 .

Système {grimpeur+corde}.

Bilan des forces entre 1 et 2 : uniquement le poids. C'est une force conservative ($\mathcal{E}_p = mgh$) et donc l'énergie mécanique se conserve.

- Au point 1 , l'énergie mécanique du grimpeur est $\mathcal{E}_{m1} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = mgh$.

- Au point 2, elle devient $\mathcal{E}_{m2} = \frac{1}{2}mv_2^2$.

On a donc $mgh = \frac{1}{2}mv_2^2$, d'où $v = \sqrt{2gh} = 1.0 \times 10 \text{ m/s}$.

2. 2 - Système {grimpeur+corde}.

Entre 1 et 2 seul le poids intervient, mais entre 2 et 3 la corde se tend et il faut ajouter l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k\Delta l^2$ avec Δl l'allongement de la corde.

Bilan entre les instants 1 et 3 :

- En 1, $\mathcal{E}_{m1} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = mgh$.

- En 3, vitesse nulle et $\mathcal{E}_{m3} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + mg(-\Delta l)$.

On a donc :

$$mgh = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + mg(-\Delta l), \quad \text{soit} \quad \Delta l^2 - \frac{2mg}{k}\Delta l - \frac{mgh}{k} = 0$$

En négligeant l'avant dernier terme devant le dernier (car $\Delta l \ll h$), on obtient $\Delta l = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$.

3. La force exercée est, en norme :

$$F_{\max} = k\Delta l = \sqrt{2mghk} = \sqrt{2mgh \frac{\alpha}{L_0}}, \quad \text{soit} \quad F_{\max} = \sqrt{2mg\alpha f}.$$

On a $F_{\max} = \sqrt{2 \times 100 \times 10 \times 5 \times 10^4 \times 1} = 10 \text{ kN}$, ce qui est inférieure à la limite de 12 kN .

4. $f = 1/0.5 = 2$ dans le premier cas, $f = 4/8 = 0.5$ dans le second. Le premier cas est donc plus dangereux car $F_{\max}$ est en $\sqrt{f}$, donc deux fois plus importante dans le cas 1 .

Exercice 3 : Projection avec un ressort

1)

On cherche l'expression sous la forme

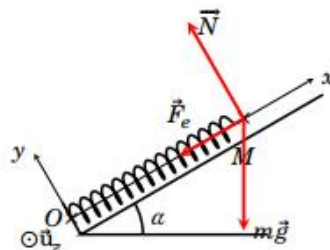
$$v_f = \lambda m^\beta k^\gamma a^\delta \Rightarrow L \cdot T^{-1} = M^\beta \cdot (M \cdot T^{-2})^\gamma \cdot L^\delta = M^{\beta+\gamma} \cdot L^\delta T^{-2\gamma}$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \delta = 1 \\ -1 = -2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1/2 \\ \delta = 1 \\ \gamma = 1/2 \end{cases}$$

D'où finalement

$$v_f = \lambda a \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2)



$$m\vec{g} = -mg \sin \alpha \vec{u}_x - mg \cos \alpha \vec{u}_y$$

$$\vec{N} = N_y \vec{u}_y + N_z \vec{u}_z \quad \text{impose } y = z = 0$$

$$\vec{F}_e = -k(x - \ell_0) \vec{u}_x$$

3)

On considère le référentiel terrestre galiléen, donc on peut écrire la 2^e loi de Newton :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_e \quad \overset{\cdot\vec{u}_x}{\Rightarrow} \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = k\ell_0 - mg \sin \alpha}$$

4)

En situation d'équilibre, $\ddot{x} = 0$ donc en injectant dans l'équation précédente on obtient

$$kx_{\text{éq}} = k\ell_0 - mg \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k} \sin \alpha}$$

On constate que le ressort est plus comprimé que sa longueur à vide ($x_{\text{éq}} < \ell_0$) et que cette compression augmente avec l'effet du poids selon l'axe (Ox) et diminue avec la raideur du ressort, ce qui est attendu.

5)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{\text{eq}}$$

6)

$$x(t = 0) = x_{\text{eq}} - a \Leftrightarrow A = -a$$

$$v_x(t = 0) = 0 \Leftrightarrow B = 0$$

$$x(t) = x_{\text{eq}} - a \cos(\omega_0 t), \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

7)

On dérive deux fois l'expression précédente et on obtient

$$\ddot{x} = a\omega^2 \cos(\omega t)$$

d'où la condition recherchée

$$\ddot{x}(t_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega t_f = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_f = \frac{\pi}{2\omega}}$$

8)

$$\dot{x}(t_f) = a\omega \sin(\omega t_f) = a\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_f = a\sqrt{\frac{k}{m}}\vec{u}_x}$$

On constate que la vitesse d'éjection augmente avec un ressort plus raide ou plus comprimé, ce qui est cohérent, et diminue avec l'inertie. On retrouve également l'expression anticipée par analyse dimensionnelle, avec $\lambda = 1$.