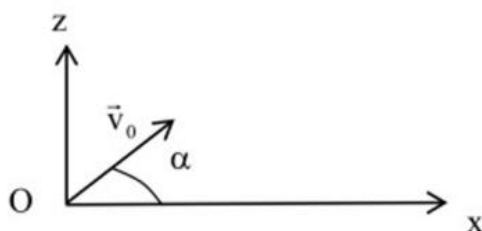


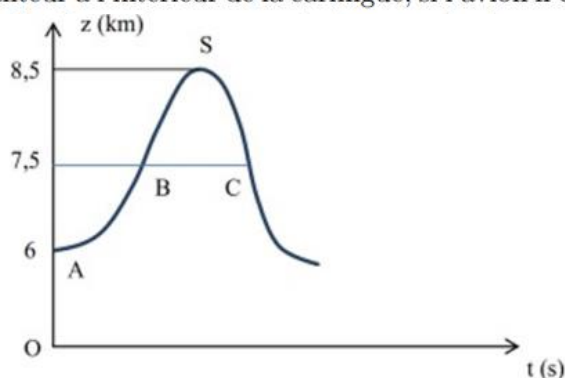
DM n°6 : Mécanique du point

Exercice 1 : Avion en chute libre

Un avion, l'Airbus 300 Zéro-G, se déplace dans un plan vertical. Sa carlingue est équipée pour l'entraînement des astronautes à l'impesanteur.



Il y a impesanteur à l'intérieur de la carlingue, si l'avion n'est soumis qu'à son poids (chute libre sans frottement).



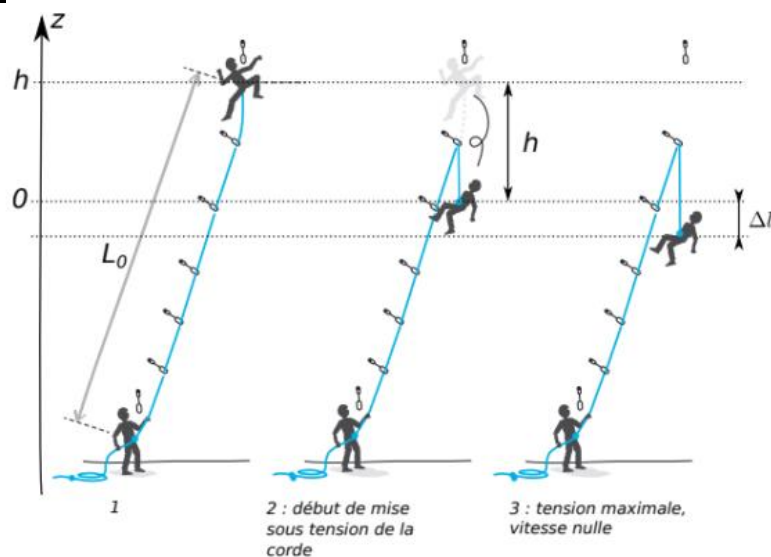
En B, sa vitesse est de $200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ avec un angle d'inclinaison $\alpha = 45^\circ$ par rapport à l'horizontale. Le long du trajet BSC, les moteurs sont coupés.

On assimile dans cet exercice l'avion à un point matériel M de masse m soumis uniquement à son poids.

1. Faire un schéma de la situation.
2. En appliquant le PFD, exprimer le vecteur accélération puis le vecteur vitesse en fonction du temps.
3. Déterminer les lois horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement.
4. En déduire l'équation cartésienne $z(x)$ de la trajectoire. À quel type de courbe la trajectoire correspond-elle ?
5. Déterminer les coordonnées x_S et z_S du sommet S de la courbe. Calculer z_S .
6. Calculer la durée t_{BSC} de l'impesanteur.

Exercice 2 : Chute sur corde en escalade

On étudie un grimpeur qui effectue une chute. Une corde d'escalade de longueur L_0 peut en première approximation être modélisée par un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur $k = \frac{\alpha}{L_0}$, avec α une caractéristique de la corde. Le grimpeur est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension. Puis la corde passe sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur Δl . La vitesse du grimpeur devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta l$.



(source : site Petzl)

On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, une corde avec $\alpha = 5.0 \times 10^4 \text{ N}$ et un grimpeur de masse 100 kg .

1. À l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse maximale atteinte par le grimpeur. Faire l'application numérique pour une hauteur de chute $h = 5 \text{ m}$.
2. Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal Δl de la corde en fonction de m, g, h et k . On supposera que $\Delta l \ll h$ afin de simplifier le calcul.
3. Donner enfin l'expression de la force maximale $F_{\max}$ qui s'exerce sur le grimpeur. On introduira le facteur de chute $f = h/L_0$.

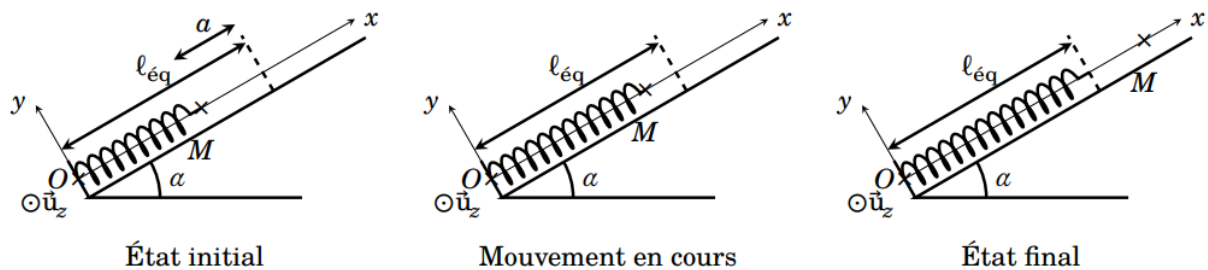
Au delà d'une force de 12 kN , les dommages sur le corps humain deviennent importants. Que vaut $F_{\max}$ pour une chute de $h = 4 \text{ m}$ sur une corde de longueur $L_0 = 4 \text{ m}$? Conclusion?

4. Une chute d'un mètre arrêtée par une corde de 50 cm est-elle plus ou moins dangereuse qu'une chute de 4 m arrêtée par une corde de 8 m ?

Exercice 3 : Projection avec un ressort

On considère un objet de masse m que l'on veut éjecter à une vitesse $\vec{v}_f$ formant un angle α par rapport à l'horizontale. On propose un dispositif à ressort avec un guidage : l'objet, modélisé par un point matériel M de masse m , est posé sur un rail qui contraint son mouvement dans la direction voulue (notée (Ox) par la suite), puis on comprime le ressort et on lâche pour propulser l'objet.

Dans l'état initial, le ressort est comprimé d'une longueur a par rapport à sa position d'équilibre ℓ_{eq} , puis il est lâché sans vitesse initiale. Lorsque l'accélération s'annule en bout de course, on considère que l'objet est éjecté et n'est alors plus poussé par le ressort : il atteint sa vitesse finale et est éjecté.



1. On admet qu'on peut anticiper la norme de cette vitesse d'éjection comme une fonction de m, k et a seulement. Établir une expression possible par analyse dimensionnelle (on introduira une constante sans dimension λ). (cf. Partie 4 du chapitre n°2 : Analyse dimensionnelle)

On considère trois forces : Le poids $\vec{P}$, la force élastique $\vec{F}_e$ (de raideur k et de longueur à vide ℓ_0) et la réaction du support $\vec{R} = \vec{R}_N$.

2. Projeter les trois forces dans la base $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On exprimera la force élastique en fonction de k, x et ℓ_0 .
3. Montrer que l'équation différentielle sur x s'écrit : $m\ddot{x} + kx = k\ell_0 - mg \sin \alpha$
4. En déduire l'expression de la position à l'équilibre x_{eq} .
5. Résoudre cette équation différentielle (solution de l'équation homogène et solution particulière). Faire apparaître dans la solution deux constantes réelles A et B ainsi que la position d'équilibre x_{eq} .
6. Déterminer les constantes A et B à partir des CI : $x(t = 0) = x_{eq} - a$ et $v_x(t = 0) = 0$.
7. En déduire la date t_f à laquelle $a_x = \ddot{x} = 0$.
8. En déduire la vitesse d'éjection $\vec{v}_f$. Commenter cette expression.