

Exercices : Cinématique du point

1) Jeu de plage

1. On connaît les composantes du vecteur accélération :
 $a_x = \ddot{x} = 0$; $a_y = \ddot{y} = -a$; $a_z = \ddot{z} = 0$.

On peut donc déterminer celles du vecteur vitesse, à chaque instant, par intégration, en déterminant les constantes à l'aide des conditions initiales :

$$v_x = \dot{x} = V_0 \cos(\alpha) ; v_y = \dot{y} = -at + V_0 \sin(\alpha) ; v_z = \dot{z} = 0.$$

Une nouvelle intégration, en tenant compte toujours des conditions initiales, permet d'obtenir

$$\text{les équations horaires : } \boxed{x(t) = V_0 \cos(\alpha)t ; y(t) = -\frac{a}{2}t^2 + V_0 \sin(\alpha)t ; z(t) = 0.}$$

⇔ Méthode 9.4

2. L'une des équations cartésiennes est $\boxed{z = 0}$: le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) .

Il suffit d'éliminer le temps entre les deux premières équations pour obtenir l'équation de la

$$\text{trajectoire : } t = \frac{x}{V_0 \cos(\alpha)} \text{ d'où } \boxed{y(x) = -\frac{a}{2V_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x.}$$

La trajectoire est parabolique, d'axe parallèle à (Oy) .

⇔ Méthode 9.5

3. Pour que Lulu attrape le frisbee, il faut que $y(D) = 0$, d'où $V_0 = \sqrt{\frac{aD}{2\cos^2(\alpha)\tan(\alpha)}}$ soit

$$\text{encore } \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{aD}{\sin(2\alpha)}}. \text{ (Pour } \alpha = 45^\circ, \text{ l'expression se simplifie en } V_0 = \sqrt{aD} \text{.)}}$$

2) Toto sur un toboggan

1. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ donc $\boxed{r = R = \text{cte}}$. $\tan \theta = \frac{y}{x} = \tan(\omega t)$ avec $\cos \theta = \frac{x}{R} = \cos(\omega t)$, donc $\boxed{\theta = \omega t}$.

⇔ Méthode 9.1

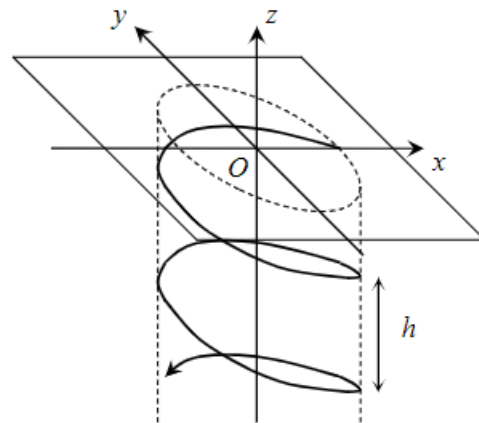
2. $r = R = \text{cte}$ donc la trajectoire se trouve sur un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R .

θ augmente régulièrement donc Toto tourne autour de l'axe, et z diminue régulièrement donc Toto descend aussi le long de l'axe.

Il s'agit donc globalement d'une hélice circulaire d'axe (Oz) , de rayon R et de pas

$$h = \frac{2\pi b}{\omega} \text{ (le pas est la distance dont Toto}$$

descend à chaque tour).



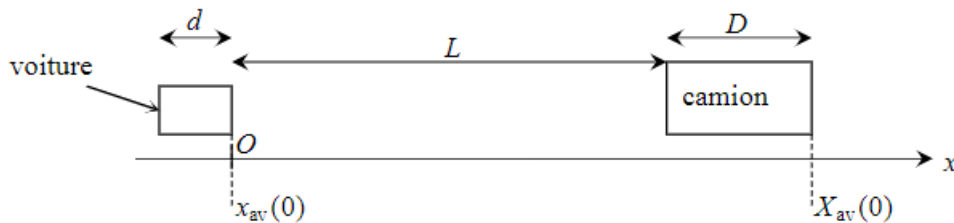
3. $v_x = \dot{x} = -\omega R \sin(\omega t)$, $v_y = \dot{y} = \omega R \cos(\omega t)$ et $v_z = \dot{z} = -b$ donc $\boxed{v = \sqrt{\omega^2 R^2 + b^2}}$. On constate que le mouvement est uniforme.

4. $a_x = \ddot{x} = -\omega^2 R \cos(\omega t)$, $a_y = \ddot{y} = \omega^2 R \sin(\omega t)$ et $a_z = \ddot{z} = 0$ donc $\boxed{a = \omega^2 R}$. Le module de l'accélération est également constant au cours du mouvement.

⇔ Méthode 9.3

3) Dépassement

1. Un petit schéma de ce qui se passe à $t = 0$ permettra d'y voir un peu plus clair.



La voiture est animée, pour $t \geq 0$, d'un mouvement rectiligne uniformément retardé :

$$\ddot{x}_{av} = -a ; \dot{x}_{av}(t) = at + \dot{x}_{av}(0) = at + v_0 ; x_{av}(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_{av}(0), \text{ soit } \boxed{x_{av}(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t}$$

Le camion est, quant à lui, animé d'un mouvement rectiligne uniforme. On obtient donc, en tenant compte des conditions initiales ($X_{av}(0) = L + D = 45 \text{ m}$) : $\boxed{X_{av}(t) = v_0t + L + D}$.

⇒ Méthode 9.4

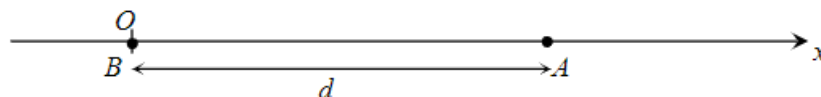
2. On cherche donc une date t_1 telle que $x_{av}(t_1) - X_{av}(t_1) = \ell + d$ avec $\ell = 20 \text{ m}$. Cela conduit

$$\text{à : } \frac{a}{2}t^2 + v_0t - v_0t - L - D = \ell + d \text{ d'où } \boxed{t = \sqrt{\frac{2(\ell + d + L + D)}{a}}}. \text{ AN } \boxed{t_1 = 6,8 \text{ s}}.$$

Alors la distance parcourue par le camion est $\boxed{C = X_{av}(t_1) - X_{av}(0) = v_0t_1}$. AN $\boxed{C = 140 \text{ m}}$.

4) Attention au choc

1. À l'instant initial, les positions des deux véhicules sont les suivantes :



Pour la première voiture à partir de $t = 0$: $\ddot{x}_A = \text{cte}$ donc $\dot{x}_A(t) = \ddot{x}_A t + \text{cte}$, avec $\dot{x}_A(0) = v$ d'où

$$\dot{x}_A(t) = \ddot{x}_A t + v ; \text{ ensuite } \boxed{x_A(t) = \frac{\ddot{x}_A}{2}t^2 + vt + d} \text{ avec } x_A(0) = d.$$

Pour la seconde à partir de $t_B = 2,0 \text{ s}$: $\ddot{x}_B = \text{cte}$, $\dot{x}_B(t) = \ddot{x}_B t + \text{cte}$, avec $\dot{x}_B(t_B) = v$ d'où

$$\dot{x}_B(t) = \ddot{x}_B(t - t_B) + v ; \text{ ensuite } \boxed{x_B(t) = \frac{\ddot{x}_B}{2}(t - t_B)^2 + vt + \text{cte}}, \text{ avec } x_B(t_B) = x_B(0) + vt_B = vt_B$$

$$\text{donc } \boxed{x_B(t) = \frac{\ddot{x}_B}{2}(t - t_B)^2 + vt}.$$

Ces équations horaires ne sont valables que pendant la durée du freinage de chacune des voitures, donc avant leurs dates d'arrêt : $t'_A = -\frac{v}{\ddot{x}_A} = 15 \text{ s}$ pour la première, $t'_B = t_B - \frac{v}{\ddot{x}_B} = 32 \text{ s}$ pour l'autre.

⇒ Méthode 9.4

2. On cherche s'il existe une date t_c telle que $x_A(t_c) = x_B(t_c) \Leftrightarrow \frac{\ddot{x}_A}{2}t_c^2 + d = \frac{\ddot{x}_B}{2}(t_c - t_B)^2$ ce qui donne l'équation du second degré : $(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B)t_c^2 + 2\ddot{x}_B t_B t_c + 2d - \ddot{x}_B t_B^2 = 0$. La résolution de cette

équation du second degré donne $\boxed{t_c = 11 \text{ s}}$. Cette date se trouve bien dans le domaine de validité des équations horaires.

Pour trouver l'abscisse du contact, on utilise, au choix, une des deux équations horaires :

$$\boxed{x_c = x_A(t_c) = x_B(t_c) = 300 \text{ m}}.$$

5) Cycloïde

1. Si la roue ne glisse pas, son centre avance à chaque tour d'une longueur égale à son périmètre, soit $2\pi R$. Comme la roue a alors tourné de $\theta = 2\pi$, on a $x_c = x_{c0} + R\theta$. Le choix d'origine du repère assure ici que $x_{c0} = 0$.

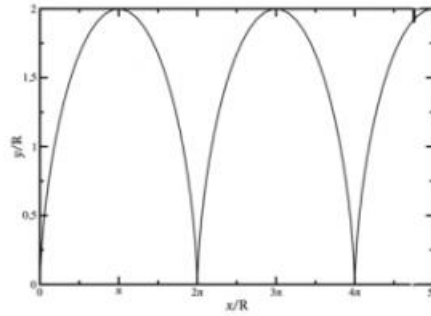
2. On a $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CA}$ avec H le projeté orthogonal de C sur l'axe (Oy) . Comme

$$\overrightarrow{CA} = R[-\sin\theta\vec{u}_x - \cos\theta\vec{u}_y] \quad , \quad \overrightarrow{HC} = x_c\vec{u}_x = R\theta\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OH} = R\vec{u}_y,$$

on obtient alors :

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = R[(1 - \cos\theta)\vec{u}_y + (\theta - \sin\theta)\vec{u}_x]}$$

3. La courbe de la cycloïde est donnée ci-dessous.



4. On en déduit les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans le référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ sont fixes :

$$\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\sin\theta\vec{u}_y + R\dot{\theta}(1 - \cos\theta)\vec{u}_x}$$

$$\boxed{\vec{a} = R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{u}_y + R[\ddot{\theta}(1 - \cos\theta) + \dot{\theta}^2\sin\theta]\vec{u}_x}$$

5. Lorsque le point A repasse en $\theta = 0[2\pi]$, c'est-à-dire au contact avec le sol, on a $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{a} = R\dot{\theta}^2\vec{u}_y$. La vitesse coïncide alors avec la vitesse du point du sol à l'instant du contact : on dit qu'il y a roulement sans glissement.