

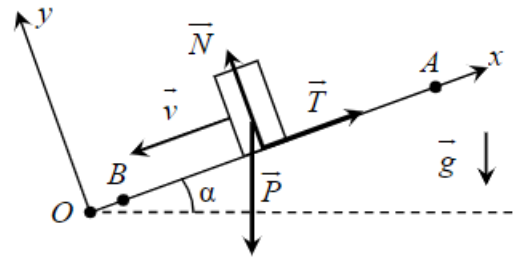
Exercices : Energétique du point

1) Le skieur

1. Le poids est une force connue mais la réaction normale est inconnue *a priori*. Pour calculer son travail il faut tout d'abord la déterminer (et on en déduira la réaction tangentielle).

Pour cela on applique le PFD au skieur dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = m\vec{a}$$



avec $\vec{P} = -mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y$, $\vec{N} = N \vec{e}_y$ et $\vec{T} = T \vec{e}_x = \mu N \vec{e}_x$. Projection sur l'axe (Oy) , orthogonal au mouvement : $-mg \cos \alpha + N = 0$ d'où $N = mg \cos \alpha$ et $T = \mu mg \cos \alpha$.

On peut maintenant calculer les travaux de ces trois forces, qui sont toutes constantes.

$$W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = (-mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y) \cdot (-AB \vec{e}_x) \quad \text{soit} \quad \boxed{W(\vec{P}) = +mg \sin \alpha AB}. \quad \text{AN}$$

$$\boxed{W(\vec{P}) = +13 \text{ kJ}}. \quad W(\vec{N}) = \vec{N} \cdot \overrightarrow{AB} = +mg \cos \alpha \vec{e}_y \cdot (-AB \vec{e}_x) \quad \text{soit} \quad \boxed{W(\vec{N}) = 0}.$$

$$W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \overrightarrow{AB} = +\mu mg \cos \alpha \vec{e}_x \cdot (-AB \vec{e}_x) \quad \text{soit} \quad \boxed{W(\vec{T}) = -\mu mg \cos \alpha AB}. \quad \text{AN} \quad \boxed{W(\vec{T}) = -2,9 \text{ kJ}}.$$

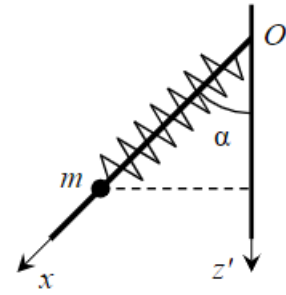
2. Théorème de l'énergie cinétique entre les positions A et B :

$$\Delta E_c(M)_{\mathcal{R}} = W(\vec{P}) + W(\vec{N}) + W(\vec{T}) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = +mg \sin \alpha AB + 0 - \mu mg \cos \alpha AB \quad \text{d'où on}$$

$$\text{tire} \quad \boxed{v_B = \sqrt{2g AB(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}. \quad \text{AN} \quad \boxed{v_B = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 65 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}.$$

2) Ressort sur tige inclinée

1. a) La masse m est soumise à deux forces conservatives, son poids et la tension du ressort, et à la réaction normale de la tige qui ne travaille pas. Énergie potentielle élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{cte}$. Énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = -mgz' + \text{cte}$ en utilisant un axe (Oz') vertical descendant ; or $z' = x \cos \alpha$ donc $E_{pp} = -mgx \cos \alpha + \text{cte}$.



Finalement :
$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 - mgx \cos \alpha + \text{cte}.$$

✍ Il faut toujours commencer par une liste complète des forces, puis voir celles qui sont conservatives et celles qui ne travaillent pas au cours du mouvement. Si toutes les forces entrent dans l'une ou l'autre de ces catégories, alors l'évolution est conservative : la méthode avec l'énergie potentielle est utilisable.

b) x_{eq} vérifie $\frac{dE_p}{dx}(x_{\text{eq}}) = k(x_{\text{eq}} - \ell_0) - mg \cos \alpha = 0$ soit $x_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg \cos \alpha}{k}$.

☞ Quand on recherche un extremum, on dérive par rapport à la variable spatiale (ici x) et non par rapport au temps t .

c) $E_p = \frac{1}{2}k\left(u + \frac{mg \cos \alpha}{k}\right)^2 - mg(u + x_{\text{eq}}) \cos \alpha + \text{cte}$ soit finalement $E_p = \frac{1}{2}ku^2 + \text{cte}$ après simplification et regroupement de toutes les constantes. La constante finale peut être prise nulle.

⇨ Méthode 11.6

2. a) La seule force non conservative (la réaction) ne travaille pas, donc l'énergie mécanique se conserve : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2 = \text{cte}$ donc $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{u}\ddot{u} + k\dot{u}u = 0$, ce

qui donne soit $\dot{u} = 0$ (équilibre), soit $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$ en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

☞ Cette fois on cherche une équation différentielle donnant l'évolution temporelle, donc on dérive par rapport à t .

b) La solution est de la forme $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$: la période est donc $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

3) Acrobaties

1. On étudie le point matériel M (de masse m) dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces appliquées : poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_y$; réaction $\vec{R}$ de la rampe, réduite à une seule composante normale car il n'y a pas de frottement. Théorème de l'énergie cinétique entre le point A et le point O : $\frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = W(\vec{P})_{A \rightarrow O} + W(\vec{R})_{A \rightarrow O}$.

$W(\vec{R})_{A \rightarrow O} = 0$ car cette force est toujours orthogonale au déplacement.

$W(\vec{P})_{A \rightarrow O} = \vec{P} \cdot \vec{AO} = -mg \vec{e}_y \cdot (-h \vec{e}_y - x_A \vec{e}_x) = +mgh$. Donc $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$ d'où $v_0 = \sqrt{2gh}$.

⇒ Méthode 11.1

2. T  C entre A et M : $\frac{1}{2}mv^2 - 0 = W(\vec{P})_{A \rightarrow M} + W(\vec{R})_{A \rightarrow M}$ avec toujours $W(\vec{R})_{A \rightarrow M} = 0$

et $W(\vec{P})_{A \rightarrow M} = \vec{P} \cdot \vec{AM} = -mg \vec{e}_y \cdot (-h \vec{e}_y - x_A \vec{e}_x + a(1 - \cos \theta) \vec{e}_y) = +mg(h + a(\cos \theta - 1))$.

On obtient donc $v = \sqrt{2g(h + a(\cos \theta - 1))}$.

3. PFD : $m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{R}$. Lorsque M est sur le cylindre, $\vec{a}(M) = -a\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + a\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$, $\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$ et $\vec{R} = R_r \vec{e}_r$. La projection du PFD sur $\vec{e}_r$ donne donc : $-ma\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + R_r$. Or $v^2 = 2g(h + a(\cos \theta - 1)) = a^2\dot{\theta}^2$ donc on obtient finalement :

$$R_r = -mg \cos \theta - m \frac{2g}{a}(h + a(\cos \theta - 1)) \text{ soit } \vec{R} = -mg \left(\frac{2h}{a} + 3 \cos \theta - 2 \right) \vec{e}_r.$$

✍ Seul le PFD permet de déterminer une force qui ne travaille pas, puisque dans tous les théorèmes énergétiques elle disparaît.

4. a) Si v s'annule, le patineur s'arrête en un certain point du cylindre et il faut alors distinguer deux cas. Soit il est sur la moitié inférieure du cylindre $\left(\theta < \frac{\pi}{2}\right)$, alors le patineur redescend le long du cylindre et remontera finalement jusqu'au point A (puis oscillera). Soit il est déjà arrivé dans la partie supérieure $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$, donc sous la piste : alors il va quitter la piste et tomber verticalement jusqu'à un point de la partie inférieure de la piste, et repartira ensuite vers la gauche.

b) Si R s'annule (puis change de sens d'après les calculs), c'est que l'hypothèse du contact (unilatéral) entre le patineur et la piste n'est plus valable, donc que le patineur quitte la piste. Il se retrouve alors en chute libre avec une vitesse initiale non nulle, donc il suivra une trajectoire parabolique jusqu'au moment où il touche à nouveau la piste.

5. Le patineur pourra faire un tour complet si aucun des deux cas précédents ne se présente. Il faut donc que les valeurs de v et R_r restent non nulles jusqu'à $\theta = \pi$: $v_{\min} = \sqrt{2g(h - 2a)} > 0$

donc $h > 2a$, et $R_{\min} = mg \left(\frac{2h}{a} - 5 \right) > 0$ donc $h > \frac{5}{2}a$ (la seconde inégalité implique la première).

4) Ressort horizontal

1. La masse est soumise à son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$, à la force de rappel du ressort $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x$ et à la réaction normale de la tige $\vec{R} = R_y\vec{e}_y + R_z\vec{e}_z$.

Les deux premières sont des forces conservatives, donc dérivent d'une énergie potentielle : celle de pesanteur est $E_{pp} = mgz + \text{cte} = \text{cte}$ et on peut choisir cette constante nulle ; l'énergie

potentielle élastique est $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte} = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte}$ et on prendra cette deuxième constante nulle (origine de E_p au point O). D'autre part l'énergie cinétique de M est ici $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. L'énergie mécanique de M est donc : $E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

2. La seule force non conservative est la réaction, mais elle est toujours orthogonale au mouvement donc elle ne travaille pas : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{R}) = 0$ donc $E_m = \text{cte}$.

Initialement : $x = X_0$ et $\dot{x} = 0$ donc $E_m = \frac{1}{2}kX_0^2$.

3. L'énergie mécanique étant constante, sa dérivée temporelle est toujours nulle :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}k(2x\dot{x}) + \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) = \dot{x}(kx + m\ddot{x}).$$

Il y a donc deux possibilités : $\dot{x}(t) = 0 = \text{cte}$, solution particulière qui correspond à l'équilibre,

ou bien $kx + m\ddot{x} = 0$ soit $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, qui est l'équation différentielle cherchée.

On peut l'écrire $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

4. Cette équation différentielle admet une solution du type $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, A et φ étant des constantes à déterminer avec les conditions initiales : $\dot{x}(0) = -\omega_0 A \sin \varphi = 0$, donc $\sin \varphi = 0$ et on peut prendre $\varphi = 0$; $x(0) = A \cos \varphi = X_0$ soit $A = X_0$. Donc $x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t)$.

La période est définie par $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, soit $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. AN $T_0 = 0,70 \text{ s}$.

5. Au passage en O l'énergie potentielle est nulle, donc la conservation de l'énergie mécanique

donne : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kX_0^2$ d'où $v = \sqrt{\frac{k}{m}}X_0 = \omega_0 X_0$. AN $v = 0,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.