

I] Force de Lorentz**1. Expression de la force de Lorentz**

Une particule chargée de charge électrique q soumise à un champ électrique $\vec{E}$ et à un champ magnétique $\vec{B}$ subit une action mécanique, modélisée par la force de Lorentz :

$$\vec{f}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Avec :

- La charge q en Coulomb (C).
- Le champ électrique $E = \|\vec{E}\|$ en $V.m^{-1}$.
- Le champ magnétique $B = \|\vec{B}\|$ en tesla (T).

Quelques ordre de grandeur de champs électrique et magnétique du quotidien :

Dispositifs	Champs électrique
Tube fluorescent	10 V.m^{-1}
Atmosphère par temps clair	10^2 V.m^{-1}
Atmosphère par temps orageux	10^4 V.m^{-1}
Champ disruptif de l'air (foudre)	3.10^6 V.m^{-1}
Dans un atome	10^{12} V.m^{-1}

Dispositifs	Champs magnétique
A la surface de la Terre	5.10^{-5} T
Aimant permanent usuel	$0,1 \text{ à } 1 \text{ T}$
Bobines pour IRM	3 T

Remarque : Ordre de grandeur entre la force de Lorentz et le poids des particules chargées.

Comparons en ordre de grandeur le poids d'un proton (de masse $m = 1,67.10^{-27} \text{ kg}$, de charge $q = 1,6.10^{-19} \text{ C}$) et la force qu'il subit placé dans un champ électrique de norme $E = 1 \text{ kV.m}^{-1}$.

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{f}_{LE}\|} = \frac{mg}{qE} = \frac{1,67.10^{-27} \times 10}{1,6.10^{-19} \times 1000} \approx 10^{-10} \ll 1$$

Idem pour un proton se déplaçant à la vitesse $v = 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ dans un champ magnétique de norme $B = 1 \text{ mT}$.

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{f}_{LM}\|} = \frac{mg}{qvB} = \frac{1,67.10^{-27} \times 10}{1,6.10^{-19} \times 10^6 \times 10^{-3}} \approx 10^{-10} \ll 1$$

En conclusion :

- Le poids des particules microscopiques est négligeable devant la force de Lorentz.
- Les deux composantes de la force de Lorentz peuvent avoir des ordres de grandeur comparables.

2. Puissance fournie par le champ électromagnétique à une charge test

$$P(\vec{f}_L) = \vec{f}_L \cdot \vec{v} = q \left(\vec{E} + \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\perp \vec{v}} \right) \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

La puissance de composante magnétique de la force de Lorentz, la force de Lorentz magnétique ne travaille pas, seule la composante électrique travaille.

En appliquant le **TPC**, avec $\vec{f}_{L_E} = q\vec{E}$ et $\vec{f}_{L_M} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, il vient :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} = P(\vec{f}_{L_E}) = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

En conclusion :

- Un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée et dévier sa trajectoire.
- Un champ magnétique ne peut que dévier la trajectoire, sans modifier la norme de la vitesse.

3. Potentiel électrostatique

La force électrostatique $\vec{f}_{L_E} = q\vec{E}$ est conservative. On définit le potentiel électrostatique V à partir de l'énergie potentielle E_{pe} associée à cette force :

$$E_{pe} = qV$$

Ainsi on peut relier le potentiel électrostatique V au champ électrostatique $\vec{E}$:

$$\vec{f}_{L_E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{pe}) \Rightarrow q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(qV)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

Remarque : Lien entre la force de Lorentz électrique et la force de Coulomb.

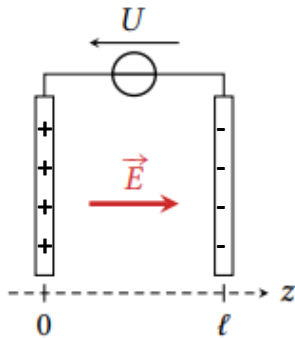
Considérons deux charges q et q_0 en interaction Coulombienne distantes de r . La force subit par la charge q est :

$$\vec{f}_{q_0 \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \vec{U}_r$$

En réalité, la charge q_0 est une source de champs électrique $\vec{E}$ (Le champs électrique engendré par une distribution de charge sera étudié en PT). Ainsi, une autre façon d'écrire la force est :

$$\vec{f}_{q_0 \rightarrow q} = q\vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{U}_r$$

On retrouve bien l'expression de la force de Lorentz électrique $\vec{f}_{L_E} = q\vec{E}$.

II] Mouvement dans un champ électrostatique uniforme**1. Réalisation pratique d'un champ électrostatique uniforme**

Considérons deux électrodes planes parallèles distantes de l soumises à une tension $U = V_+ - V_-$.

On admet que le champ électrostatique entre les électrodes est uniforme (démontré en PT) et on cherche à relier sa norme E à la tension U supposée positive. Par définition :

$$\vec{E} = E\vec{e}_z = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

On peut alors intégrer par séparation de variable en plaçant la masse $V_- = 0$ sur l'électrode de droite :

$$-\int_{V_+=U}^{V_-=0} dV = E \int_0^l dz \quad \text{soit} \quad U = El \quad \text{donc} \quad \boxed{E = \frac{U}{l}}$$

2. Vitesse atteinte par une charge accélérée par une tension

Application : Une particule de charge q est initialement immobile au voisinage d'une électrode.

1) Au voisinage de quelle électrode faut-il la placer pour qu'elle traverse le dispositif en fonction de q ?

2) En appliquant le **TEM**, déterminer la vitesse avec laquelle la seconde électrode est atteinte en fonction de U . Application numérique pour un proton avec $U = 2\text{ kV}$.

1) Dans le cas d'un proton $q > 0$, il faut le placer au voisinage de la cathode et dans le cas d'un électron $q < 0$, il faut le placer au voisinage de l'anode.

2)

$$\text{TEM: } \Delta_{AB} E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}_{NC}) = 0$$

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pe} = 0$$

Pour un proton $q > 0$:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m(v^2(x=l) - v^2(x=0)) = -\Delta E_{pe} = -q(V(x=l) - V(x=0)) = qU$$

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^3}{1,6 \times 10^{-27}}} \approx 6,2 \times 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

Remarque :

En physique des particules, on utilise une nouvelle unité d'énergie adaptée : l'électron-volt défini comme le produit de la charge de l'électron e par le volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Un électron ou un proton initialement au repos et accéléré sous une tension de 1 V acquiert une énergie cinétique de 1 eV.

3. Etude d'une trajectoire quelconque

Application : On considère une particule de masse m , de charge q , plongée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_x$. La particule est initialement au point O et sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ forme un angle $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ avec $\vec{e}_x$ et est contenu dans le plan (Oxy)

1) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule chargée étudiée. Que peut-on dire de son vecteur accélération ?

2) En déduire les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$. La particule est initialement en O .

3) En déduire l'équation $x(y)$ de la trajectoire.

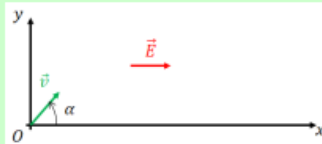
4) Tracer l'allure de la trajectoire, on distinguera le cas $q > 0$ et le cas $q < 0$.

5) Que se passe-t-il si $\alpha = 0$?

Correction :

1. D'après le PFD : $m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$. L'accélération est constante, de même sens ou de sens opposé à $\vec{E}$ selon le signe de q .

2. Commençons par faire un schéma afin de comprendre la situation :



Par intégrations successives, on trouve les équations horaires :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{q}{m}E \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{q}{m}Et + A = \frac{q}{m}Et + v_0 \cos(\alpha) \\ v_y = B = v_0 \sin(\alpha) \\ v_z = C = 0 \end{cases}$$

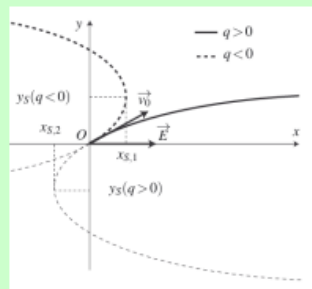
On en déduit les équations horaires :

$$\vec{OM} = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{q}{m} Et^2 + v_0 \cos(\alpha)t + D = \frac{1}{2} \frac{q}{m} Et^2 + v_0 \cos(\alpha)t \\ y = v_0 \sin(\alpha)t + F = v_0 \sin(\alpha)t \\ z = G = 0 \end{cases}$$

3. On injecte $t = \frac{y}{v_0 \sin(\alpha)}$ dans l'équation horaire $x(t)$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \left(\frac{y}{v_0 \sin(\alpha)} \right)^2 + v_0 \cos(\alpha) \frac{y}{v_0 \sin(\alpha)} \\ &= \frac{qE}{2mv_0^2 \sin^2(\alpha)} y^2 + \frac{1}{\tan \alpha} y \end{aligned}$$

4.



Allure de la trajectoire d'une particule chargée, d'après Dunod PCSI, 5^e édition

5. Si $\alpha = 0$, le vecteur position et le vecteur vitesse sont uniquement suivant $\vec{u}_x$. Si $q > 0$, la particule se déplace suivant $+\vec{u}_x$ et augmente sa vitesse au cours du temps (en fait il y a une limite due à la relativité). Si $q < 0$, le vecteur vitesse diminue jusqu'à s'annuler et changer de signe : la particule se déplace initialement suivant $+\vec{u}_x$ puis fait demi-tour.

III] Mouvement dans un champs magnétostatique uniforme

Cadre de l'étude : une particule chargée de masse m et de charge q est placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ **permanent** (indépendant du temps) et **uniforme** (indépendant de la position).

On étudie son mouvement dans le référentiel du laboratoire, galiléen à l'échelle de l'expérience.

Comme précédemment, le poids et les forces de frottement sont négligés devant la force magnétique. La particule chargée de charge q est injectée dans la zone où règne le champ magnétique $\vec{B}$ avec un vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ perpendiculaire à $\vec{B}$.

On choisit l'axe **(Oz)** dans le sens du champ magnétique : $\vec{B} = B\vec{e}_z$, avec $B = \|\vec{B}\| > 0$. Le vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ étant perpendiculaire à $\vec{B}$, il est contenu dans le plan **(Oxy)**.

1. Trajectoire plane**Application :**

- 1) Exprimer la force de Lorentz qui s'exerce sur la particule chargée.
- 2) En utilisant la propriété du produit vectoriel, justifier que $\vec{a} \cdot \vec{e}_z = 0$ à tout instant.
- 3) En déduire que le mouvement a lieu dans le plan **(Oxy)** perpendiculaire à $\vec{B}$ et contenant $\vec{v}_0$.

Correction :

$$1. \vec{f}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z) \wedge B\vec{u}_z = qB(v_y\vec{u}_x - v_x\vec{u}_y).$$

$$2. \text{Appliquons le PFD à la particule chargée : } m\vec{a} = \vec{f}_L \Rightarrow m\vec{a} \cdot \vec{u}_z = \underbrace{\vec{f}_L \cdot \vec{u}_z}_{\perp \vec{u}_z} = 0$$

3. Ainsi, l'accélération ne possède pas de composante suivant $\vec{u}_z$. La vitesse de la particule suivant $\vec{u}_z$ est donc une constante du temps, donnée par les conditions initiales. Comme la vitesse initiale n'a pas de composante suivant $\vec{u}_z$, la vitesse à un instant t de la particule est nulle suivant $\vec{u}_z$: le mouvement de la particule se fait dans le plan **(Oxy)**.

2. Rayon de la trajectoire**Application :**

En l'absence d'information sur la nature du mouvement, on utilise le système de coordonnées cartésiennes. La particule se trouve initialement en **O**. L'axe **(Ox)** est choisi dans le sens du vecteur vitesse initial ($\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$)

- 1) Etablir les équations différentielles du mouvement obtenues par projection du PFD sur les trois axes.

Il existe plusieurs méthodes de résolution. On en propose une ici :

- 2) Intégrer une fois les deux équations différentielles. Déterminer les constantes d'intégration.

3) En utilisant une substitution, établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$$

Exprimer ω_c , appelée pulsation cyclotron en fonction de m , q et B . (Attention q est une grandeur algébrique.)

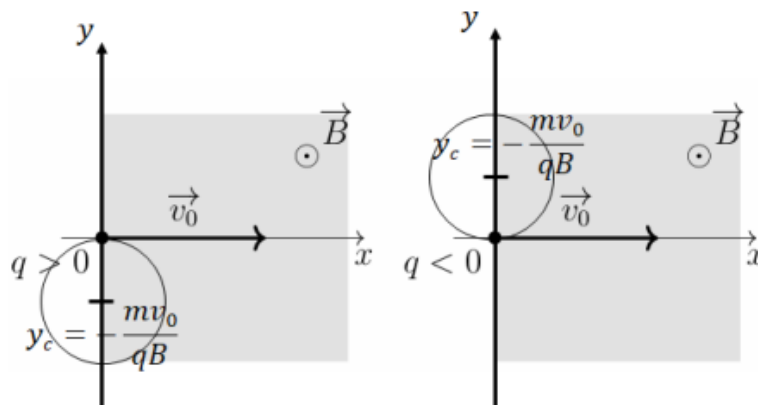
4) La résoudre complètement (compte tenu des conditions initiales) pour en déduire $x(t)$. En déduire $y(t)$.

5) En utilisant le fait que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire de la particule chargée.

Quelle est la nature du mouvement ? Déterminer ses caractéristiques (son rayon et son centre).

6) Commenter la dépendance du rayon avec les différents paramètres.

7) Commenter les schémas ci-dessous avec l'allure de la trajectoire.



Correction :

1. D'après les questions 1 et 2 de l'ex 6, les équations différentielles recherchées sont :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} & (1) \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

2. Par intégration dans les temps, et en prenant en compte les conditions initiales, les équations deviennent :

$$\begin{cases} m\dot{x} = qBy + C \Rightarrow \dot{x} = \frac{qB}{m}y + v_0 & (3) \\ m\dot{y} = -qBx + D \Rightarrow \dot{y} = -\frac{qB}{m}x & (2) \\ \dot{z} = F = 0 \end{cases}$$

3. En injectant (2) dans (1), on obtient : $m\ddot{x} = -\frac{(qB)^2}{m}x \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 x = 0$.

Par identification, on obtient $\omega_c^2 = \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \Rightarrow \omega_c = \frac{|q|B}{m}$

4. La solution générale pour $x(t)$ est $x(t) = A \cos(\omega_c t) + D \sin(\omega_c t)$. À $t = 0$, la particule est en O , donc $x(0) = 0 \Rightarrow A = 0$. Par ailleurs, sa vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x \Rightarrow \dot{x}(0) = v_0 = D\omega_c \Rightarrow D = \frac{v_0}{\omega_c}$.

Finalement : $x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$

Ainsi, $\dot{x} = v_0 \cos(\omega_c t)$. En se servant de (3), on obtient :

$$y = \frac{m}{qB} (\dot{x} - v_0) \Rightarrow y = \frac{mv_0}{qB} (\cos(\omega_c t) - 1)$$

5. On a donc $x^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 \sin^2(\omega_c t)$ et $\left(y + \frac{mv_0}{qB}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 \times \cos^2(\omega_c t)$

Finalement : $x^2 + \left(y + \frac{mv_0}{qB}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$: C'est l'équation d'un cercle de centre $\left(0, -\frac{mv_0}{qB}\right)$ et de rayon

$$R_c = \frac{v_0}{\omega_c}.$$

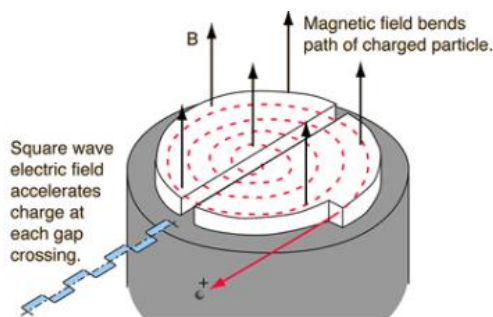
6. Le rayon de la trajectoire est d'autant plus élevé que v_0 , m sont élevés et $|q|$, B sont faibles.

7. Tracé directement sur le graphe.

3. Applications

Le champ magnétique afin de modifier la trajectoire de particules chargées est utilisé :

- Dans un **spectromètre de masse** afin de séparer les ions de rapport q/m différente. Un spectromètre de masse utilise les propriétés des mouvements des particules (après ionisation) dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour analyser les ions présents dans un faisceau ou mettre en évidence la présence d'isotopes et déterminer leurs proportions. Les isotopes sont tout d'abord ionisés, puis accélérés par $\vec{E}$, ils atteignent des vitesses différentes selon leur masse. Puis ils sont déviés par le champ magnétique, le rayon de la trajectoire dépendant de leurs masses. Ainsi des isotopes différents sont récupérés en des positions différentes.
- Dans les **accélérateurs de particules**. En effet l'accélération par un champ électrique seul. dans les accélérateurs linéaires nécessite la production d'un champ E uniforme dans une grande zone d'espace, ce qui est difficile à mettre en œuvre. On utilise alors un champ magnétique afin de courber les trajectoires et ainsi faire passer la particule un grand nombre de fois dans la zone accélératrice. C'est le cas dans les cyclotrons et les synchrotrons. L'inconvénient des cyclotrons est qu'ils nécessitent la production d'un champ magnétique uniforme dans une grande zone d'espace (sur la surface du cyclotron).



- Les **synchrotrons** associent des zones où règne un champ électrique dans lesquelles les particules sont accélérées et d'autres où règne un champ magnétique dans lesquelles les trajectoires sont courbées pour les replier sur elles-mêmes. Le rayon de la trajectoire des particules accélérées est constant et la production des champs est localisée sur la périphérie du cercle. C'est le cas du LHC (Large Hadron Collider) du CERN (Centre Européen de la Recherche Nucléaire) qui communique à des protons des énergies de l'ordre de 7 TeV (1 TeV = 10^{12} eV) avec une orbite circulaire de 13 km de rayon, ce qui nécessite des champs magnétiques de 8,3 T obtenu à l'aide d'électro-aimants supraconducteurs.