

DS N°6 Mécanique, Chimie des solutions

Exercice n°1 : Sécurisation de la zone d'arrivée d'un toboggan aquatique (Adapté CCINP TSI (2025))

Dans tout ce qui suit, on s'intéresse à un enfant modélisé par un point matériel M , de masse $m = 50 \text{ kg}$, qui glisse sur un toboggan dont le schéma est donné en **figure 1**.

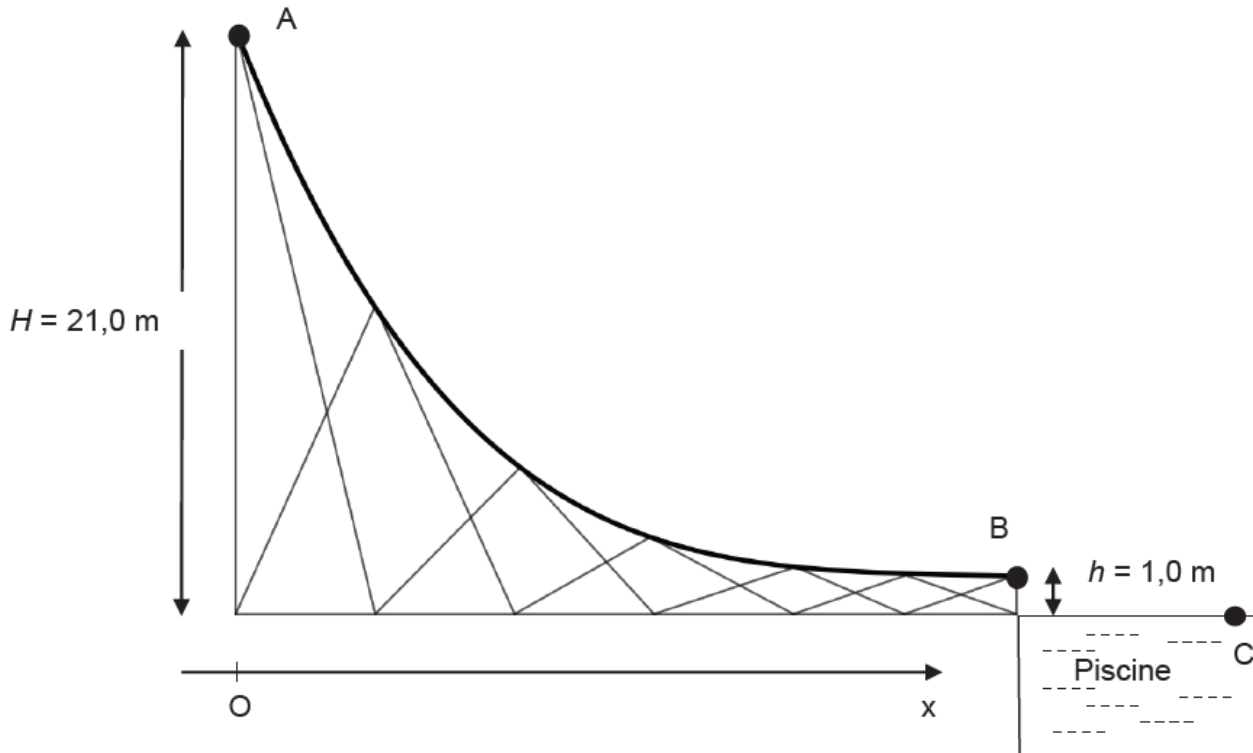


Figure 1 - Schéma d'implantation du toboggan par rapport à la piscine.

L'enfant se laisse glisser sur le toboggan depuis le point A d'altitude $H = 21,0 \text{ m}$ sans vitesse initiale. Il termine sa glissade au point B d'altitude $h = 1,0 \text{ m}$ avec une vitesse horizontale qui lui permet d'atteindre un point C à la surface de l'eau de la piscine. Une discussion s'engage lors de la conception du toboggan pour savoir dans quelle zone de la piscine il faudra interdire les baigneurs pour éviter toute collision avec l'enfant qui arrive dans la piscine. Par la suite, on prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Partie 1 : Glissade de l'enfant sur le toboggan entre A et B

On suppose tout d'abord qu'un filet d'eau annule les frottements de l'enfant sur toute la longueur $L = 37,5 \text{ m}$ de la piste du toboggan.

1. Exprimer, puis calculer le travail $W_{AB}(\vec{P})$ du poids de l'enfant lors de cette descente de A vers B .
2. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique (TEC). L'appliquer à l'enfant qui glisse sans frottement entre les points A et B et en déduire l'expression de la vitesse v_B (sans frottement) atteinte au point B en fonction des données.
3. Calculer la valeur de cette vitesse v_B (sans frottement).

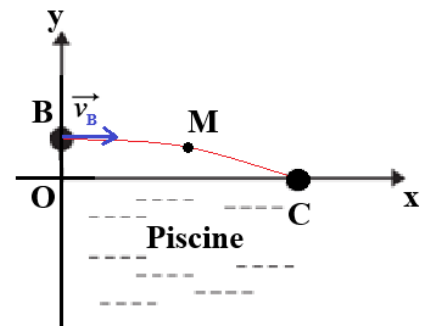
En réalité, les frottements existent et la vitesse au point **B**, horizontale, vaut $v_B = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

4. Faire figurer sur un schéma, sans souci d'échelle, les forces appliquées sur le point **M** en un endroit quelconque de la glissade.
5. Exprimer (à l'aide du **TEC**) puis calculer le travail $W_{AB}(\vec{f})$ de cette force de frottement $\vec{f}$ sur le trajet **AB**.
6. Donner l'expression du travail élémentaire de la force de frottement $\delta W(\vec{f})$ sur un petit déplacement $d\vec{OM}$ puis en déduire une expression du travail $W_{AB}(\vec{f})$ sur le trajet **AB**, en supposant la force de frottement de norme f constante sur le trajet.
7. En déduire ainsi la norme f de la force de frottement.

Partie 2 : Trajectoire de l'enfant entre B et C

On s'intéresse maintenant à la localisation du point de chute **C** dans l'eau avec une **vitesse horizontale** en **B**, $v_B = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

Le mouvement de l'enfant dans l'air est supposé **sans frottements**.
On rappelle que la hauteur entre **B** et **C** vaut $h = 1,0 \text{ m}$.



8. Pourquoi peut-on dire que l'enfant est en chute libre entre **B** et **C** ? Que vaut alors son vecteur accélération $\vec{a}$?

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \\ a_y = \end{cases}$$

9. On considère qu'à l'instant $t = 0$, l'enfant se trouve en **B**. Quelles sont les conditions initiales :

$$\vec{v}(t=0) \begin{cases} v_x(0) = \\ v_y(0) = \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{OM}(t=0) \begin{cases} x(0) = \\ y(0) = \end{cases}$$

10. Déduire des coordonnées de $\vec{a}$ les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ (en le justifiant) :

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = \\ v_y(t) = \end{cases}$$

11. Montrer alors que les équations horaires du mouvement s'écrivent :

$$\vec{OM}(t) \begin{cases} x(t) = v_B \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

12. Montrer que l'enfant touche la surface de la piscine en **C** à l'instant $t_C = 0,45 \text{ s}$
13. En déduire la valeur de la distance horizontale $d = OC$ parcourue par l'enfant avant de rentrer dans l'eau.

Partie 3 : Arrêt de l'enfant dans l'eau

Lorsqu'il arrive dans l'eau au point **C**, l'enfant, toujours assimilé à un point matériel **M** de masse **m = 50 kg**, subit une force de frottement fluide $\vec{f}_f$ telle que $\vec{f}_f = -\alpha\vec{v}$. On s'intéresse uniquement à la composante horizontale $v_x(t)$ de la vitesse $\vec{v}$ de l'enfant dans l'eau.

14. Faire un bilan des forces exercées sur l'enfant dans l'eau.
15. En projetant le **PFD** sur l'axe (Ox) , montrer que la composante horizontale de la vitesse $v_x(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\alpha}{m}v_x = 0 \quad (1)$$

Avec comme condition initiale $v_x(t = 0) = v_B = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

16. En déduire dans ce cas l'expression d'un temps caractéristique de ralentissement τ .

Une analyse vidéo a permis d'obtenir en **figure 2** la courbe d'évolution de $v_x(t)$ qui confirme l'existence d'une force de frottement.

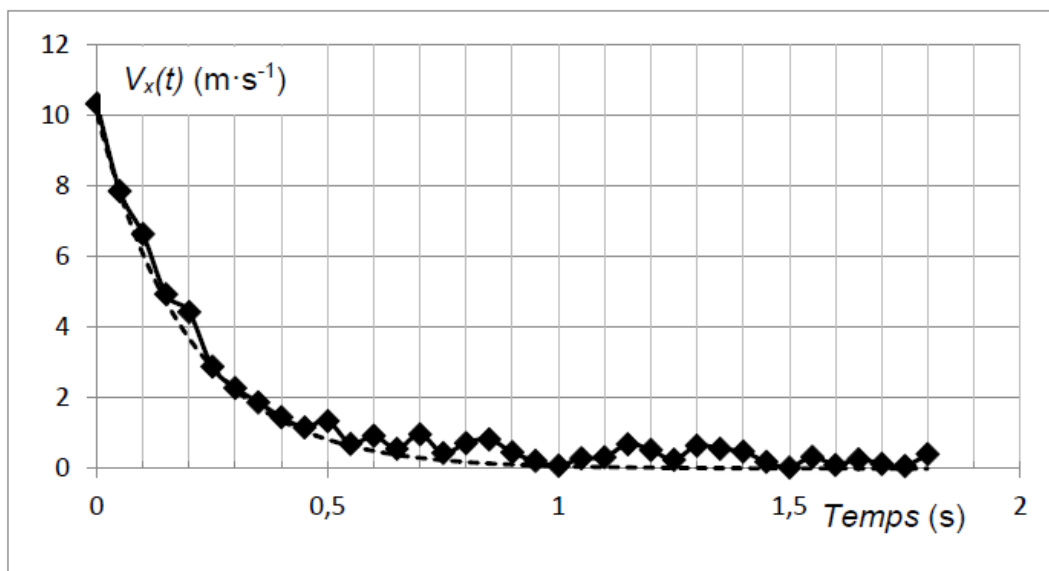
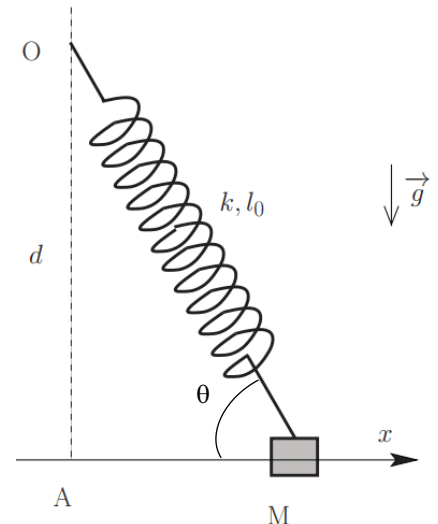


Figure 2 - Évolution de la composante horizontale de la vitesse, $v_x(t)$, en fonction du temps.

17. On peut modéliser mathématiquement la courbe expérimentale par la fonction : $v_x(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
Pourquoi cette fonction ? Quelle est la valeur de la constante **A** ?
18. En déduire alors graphiquement, en estimant la valeur du temps caractéristique τ , celle de α coefficient de force de frottement fluide. Au bout de combien de temps l'enfant s'est-il arrêté ?
19. Intégrer l'expression de $v_x(t)$ afin d'obtenir l'expression de la distance horizontale $x(t)$ parcourue par l'enfant dans l'eau à partir du point **C**.
20. En déduire la distance **horizontale**, notée **d'** et mesurée à partir du point **C**, parcourue sous l'eau par le point **M**. Calculer $d_{tot} = d + d'$ et conclure vis-à-vis des consignes de sécurité de la piscine.

Exercice n°2 Oscillateur anharmonique : bifurcateur à ressort (Adapté Agrégation externe (A 2019))

On considère le pendule représentée ci-dessous. Le point **M** d'abscisse x est toujours astreint à se déplacer sur l'axe horizontal Ax en ne subissant **aucun frottement**. La longueur du ressort est notée l et sa longueur à vide l_0 .



1. En appliquant la 2^{ème} loi de Newton au point **M** sur l'axe x , montrer que :

$$-k(l - l_0)\cos(\theta) = m\ddot{x}$$

2. A l'aide du schéma, exprimer $\cos(\theta)$ en fonction x et l puis l en fonction de x et d (Pythagore).

3. Montrer que la force résultante selon x peut s'exprimer :

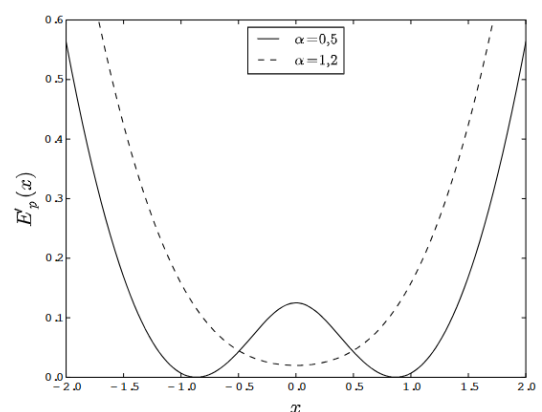
$$F(x) = -k\left(x - \frac{l_0 x}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right)$$

4. Rappeler le lien entre force conservative et énergie potentielle. Comment se simplifie cette relation dans le cas d'une force dépendante d'une unique coordonnée $\vec{F}(x) = F(x)\vec{U}_x$?
5. En déduire que la masse évolue dans un profil d'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(x^2 - 2l_0\sqrt{x^2 + d^2}\right) + cste$$

On rappelle que : $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} dx = \sqrt{x^2 + d^2} + cste$.

On donne ci-contre la représentation graphique de $E_p = f(x)$ pour deux valeurs de $\alpha = \frac{d}{l_0}$.



6. Commenter le nombre et la stabilité des positions d'équilibre pour les deux valeurs de α proposées.
7. On considère le cas $\alpha > 1$, déterminer, par un développement limité à l'ordre 0, l'équation des petits mouvements autour de la (les) position(s) d'équilibre stable(s).

Montrer que ce mouvement se ramène à celui d'un oscillateur harmonique de période T_{sup} :

$$T_{sup} = T_0\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right), \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Exercice n°3 : Traitement des effluents d'un atelier de galvanisation

Un atelier de galvanisation rejette un effluent contenant de l'ammoniac $NH_3(aq)$ des ions zinc $Zn^{2+}_{(aq)}$

On se propose d'étudier les étapes du traitement de l'effluent, avant le rejet dans le milieu biologique :

- **Etape 1** : Neutralisation acido-basique de l'ammoniac.
- **Etape 2** : Précipitation des ions zinc $Zn^{2+}_{(aq)}$ en hydroxyde de Zinc $Zn(OH)_{2(s)}$.

On mesure expérimentalement avant traitement $pH = 11,1$.

Partie 1 : Neutralisation de l'ammoniac par un acide faible

1. Rappeler les expressions du produit ionique de l'eau K_e et de la constante d'acidité K_a pour le couple NH_4^+/NH_3 .
2. Écrire l'équation bilan de la réaction acido-basique entre l'ammoniac et l'eau.
3. Exprimer la constante d'équilibre K_b de cette réaction en fonction de K_a et K_e . Calculer sa valeur.
4. Montrer que la concentration initiale en ammoniac dans l'effluent est $C_0 \approx 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

On décide d'utiliser un acide faible pour neutraliser l'effluent : l'acide méthanoïque $HCOOH$. L'objectif industriel est $pH = 7$.

5. Déterminer la masse d'acide méthanoïque à utiliser pour traiter 1 m^3 d'effluent.

Partie 2 : Précipitation des ions zinc

L'effluent contient des ions zinc $Zn^{2+}_{(aq)}$ à la concentration $[Zn^{2+}]_0 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

On cherche à éliminer les ions zinc $Zn^{2+}_{(aq)}$ par précipitation sous forme d'hydroxyde de zinc $Zn(OH)_{2(s)}$

On donne le produit de solubilité $K_s = 3,0 \times 10^{-17}$. Le pH est tamponné à 7.

6. Ecrire la réaction de dissolution de l'hydroxyde de zinc $Zn(OH)_{2(s)}$.
7. Déterminer la solubilité molaire s de $Zn(OH)_{2(s)}$ dans l'eau pure.
8. Calculer le quotient réactionnel initial $Q_{r,i}$. En déduire le sens d'évolution du système et conclure quant à la possibilité d'une précipitation dans ces conditions.
9. Établir la condition sur le pH pour que la précipitation du zinc débute.

Les ions zinc ne précipitent pas spontanément dans l'effluent avant le traitement car il sont stabilisées en présence d'ammoniac par la réaction de complexation : $Zn^{2+}_{(aq)} + 4NH_3(aq) = Zn(NH_3)_4^{2+}_{(aq)}$.

10. Tracer sur le même diagramme gradué en pH , la prédominance du couple NH_4^+/NH_3 et l'existence du précipité $Zn(OH)_{2(s)}$. Justifier alors l'objectif industriel de $pH = 7$ pour le traitement de cette effluent.

Données : $pK_a(HCOOH/HCOO^-) = 3,8$; $pK_a(NH_4^+/NH_3) = 9,2$; $pK_e = 14$; $M(HCOOH) = 46 \text{ g.mol}^{-1}$