

Introduction

La mécanique du point peut intégralement se déduire de la 2ème loi de Newton, cependant, la formulation en termes de vitesse et de forces n'est pas toujours adaptée à la description des mouvements de rotation, en particulier dans le cas des solides. Nous allons ici voir une formulation plus pratique du principe fondamental de la dynamique pour ce type de mouvement, en nous limitant dans ce chapitre au cas des points matériels.

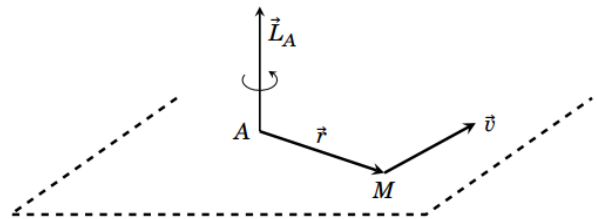
I] Théorème du moment cinétique pour le point matériel**1. Moment cinétique****a. Définition**

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $(\mathcal{R})$, on définit le moment cinétique de M au point A par :

$$\vec{L}_A(M) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}$$

$$\dim(L) = \dim(AM) \times \dim(m) \times \dim(v)$$

$$\dim(L) = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$$



Le moment cinétique est une grandeur vectorielle, son unité est le $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = J \cdot s$

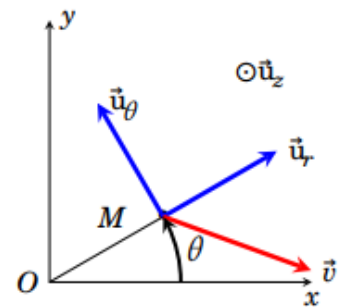
Remarque : La direction et le sens de $\vec{L}_A(M)$ indiquent la manière dont le point M « tourne autour » du point A . L'interprétation du moment cinétique est la suivante : la direction de $\vec{L}_A(M)$ est orthogonale au plan du mouvement « circulaire ».

b. Exemple de calcul**Mouvement plan en coordonnées polaires :**

Dans le cas d'un mouvement plan en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) orthogonal au plan, on écrit :

$$\begin{cases} \vec{OM} = r\vec{U}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{L}_O = r\vec{U}_r \wedge m(\dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta)$$

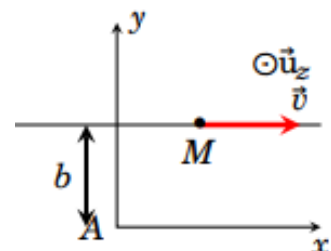
$$\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{U}_z$$

**Mouvement rectiligne à distance du point de calcul :**

On considère un point se déplaçant rectilignement à vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{U}_x$ et passant à une distance b (appelé paramètre d'impact) de A . On conduit le calcul en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \vec{AM} = x\vec{U}_x + b\vec{U}_y \\ \vec{v} = \dot{x}\vec{U}_x \end{cases} \Rightarrow \vec{L}_A = (x\vec{U}_x + b\vec{U}_y) \wedge m\dot{x}\vec{U}_x$$

$$\vec{L}_M = -mb\dot{x}\vec{U}_z$$



2. Moment d'une forcea. Définition

Soit un point matériel M soumis à une force $\vec{F}$. On définit le moment de $\vec{F}$ au point A par :

$$\overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

La dimension du moment d'une force est $M.L^2.T^{-2}$ et son unité dans le système international est le $N.m$.

Remarque : Le moment de la force $\overrightarrow{M_A(\vec{F})}$ indique la tendance que la force $\vec{F}$ aura à mettre M en rotation autour de A , un cas courant est celui où l'axe de la force passe par A : le moment de la force est alors nul.

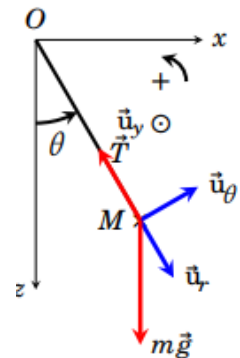
b. Exemple de calcul

Prenons l'exemple du pendule simple. Les forces extérieures appliquées au point matériel M de masse m sont le poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$.

Calculons au point O les moments de ces forces :

$$- \overrightarrow{M_O(\vec{T})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

$$- \overrightarrow{M_O(\vec{P})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\vec{U}_r \wedge mg(\cos(\theta)\vec{U}_r - \sin(\theta)\vec{U}_\theta) = -mgl\sin(\theta)\vec{U}_z$$

3. Théorème du moment cinétiquea. Enoncé

Pour un point matériel de masse M soumis à des forces $\vec{F}_i$ dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}$) :

$$\frac{d\overrightarrow{L_A(M)}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{M_A(\vec{F}_i)}$$

Preuve : Considérons un point matériel M dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}$), partons de la définition du moment cinétique et dérivons-la :

$$\frac{d\overrightarrow{L_A(M)}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}) = \overrightarrow{AM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge m\vec{v}$$

Le second terme est nul si le point A est fixe, puisque $\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} = \vec{v}$. Le premier, puisqu'on se place dans un référentiel galiléen, peut être explicité à l'aide de la 2^{ème} loi de Newton :

$$\frac{d\overrightarrow{L_A(M)}}{dt} = \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d}{dt}m\vec{v} = \overrightarrow{AM} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \overrightarrow{M_A(\vec{F}_i)}$$

b. Application au pendule simple

Traisons le pendule simple : on a déjà exprimé le moment cinétique en coordonnées cylindrique, ainsi que les moments des forces impliquées :

$$\overrightarrow{L_O} = ml^2 \dot{\theta} \overrightarrow{U_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{P}) = -mgl \sin(\theta) \overrightarrow{U_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{T}) = \vec{0}$$

Par application du théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{L_A}(\overrightarrow{M})}{dt} = \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{T}) \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} \overrightarrow{U_z} = -mgl \sin(\theta) \overrightarrow{U_z} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

c. Conservation du moment cinétique

Considérons un point matériel M soumis à un ensemble de forces $\overrightarrow{F}_i$ de résultante $\overrightarrow{F} = \sum_i \overrightarrow{F}_i$.

Le moment total calculé en A s'écrit : $\overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}$, ainsi le moment cinétique est conservé si :

$$\frac{d\overrightarrow{L_A}(\overrightarrow{M})}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F} = \vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{F} // \overrightarrow{AM}$$

- La force résultante est nulle : $\overrightarrow{F} = \vec{0}$.
- La force résultante $\overrightarrow{F}$ est portée par la droite d'action (AM) (on parle de force centrale).

La conservation du moment cinétique à des conséquences intéressantes qui seront explicitées dans le prochaine chapitre (planéité du mouvement et loi des aires).

II] Formulation scalaire par rapport à un axe fixe**1. Moment cinétique d'un point par rapport à un axe orienté****a. Définition**

Dans un cas de **rotation autour d'un axe fixe**, on comprend que le moment cinétique défini comme un vecteur est un outil plus complexe que nécessaire, puisque la direction est déjà connue. On peut donc se contenter d'une projection sur l'axe de rotation.

Soit un axe fixe Δ orienté selon un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$, et A un point quelconque de l'axe Δ .

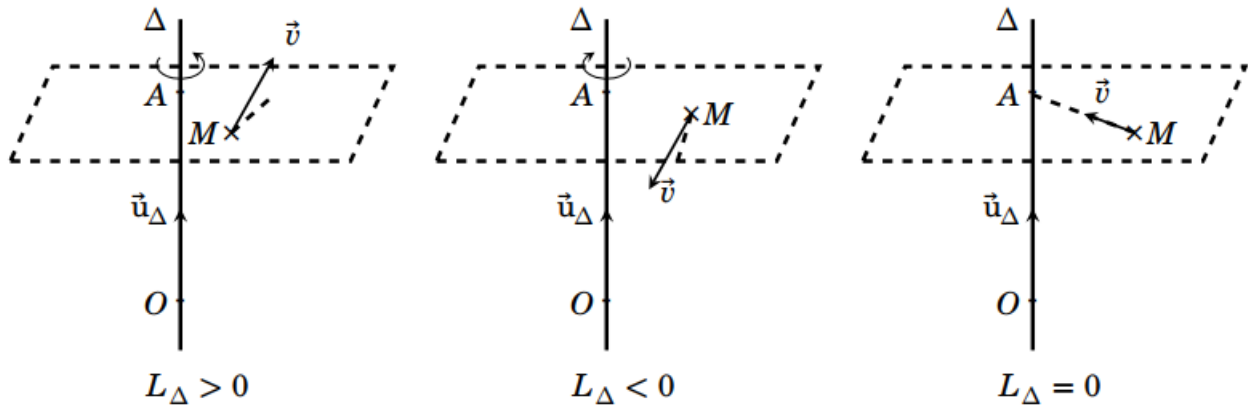
On peut définir le moment cinétique par rapport à l'axe Δ par :

$$L_\Delta(M) = \overrightarrow{L_A}(\overrightarrow{M}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

L'interprétation est la même que précédemment :

- Si $L_\Delta(M) > 0$, alors le mobile M tourne autour de l'axe Δ dans le sens du vecteur $\overrightarrow{u_\Delta}$.
- Si $L_\Delta(M) < 0$, alors le mobile tourne dans l'autre sens.

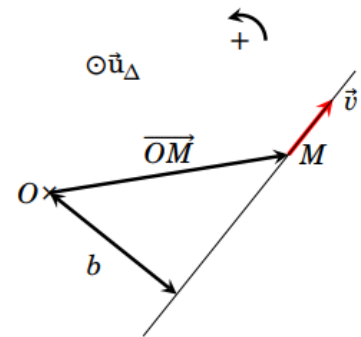
• Si $L_{\Delta}(M) = 0$, alors le mobile M ne tourne pas autour de Δ : la prolongation de son vecteur vitesse $\vec{v}$ est alors colinéaire à Δ ou passe par Δ , ne privilégiant aucune rotation autour de ce dernier.



b. Calcul par la méthode du paramètre d'impact

Le calcul du moment cinétique scalaire peut se conduire de façon géométrique : en effet, seule la distance entre la droite d'appui du vecteur vitesse et l'axe de rotation, appelée **paramètre d'impact**, sera comptabilisée dans le produit vectoriel. Ainsi :

• La valeur absolue de $L_{\Delta}(M)$ est obtenue en écrivant $|L_{\Delta}(M)| = m v b$ où b est le paramètre d'impact.



• Le signe est obtenu en observant le schéma. Sur le schéma ci-contre, on obtient ainsi $L_{\Delta}(M) = +m v b$.

2. Moment d'une force par rapport à un axe orienté

a. Définition

Comme précédemment, on peut simplifier la description si le mouvement de rotation a lieu autour d'un axe fixe connu Δ .

On définit le moment scalaire de $\vec{F}$ par rapport à Δ par :

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_A(\vec{F})} \cdot \overrightarrow{u_{\Delta}}$$

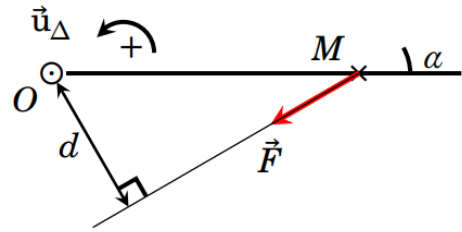
Le signe de $M_{\Delta}(\vec{F})$ nous donne le même genre d'informations que le signe de $L_{\Delta}(M)$:

- Si $M_{\Delta}(\vec{F}) > 0$, alors la force $\vec{F}$ induit une rotation de M autour de l'axe Δ dans le sens du vecteur $\overrightarrow{u_{\Delta}}$.
- Si $M_{\Delta}(\vec{F}) < 0$, alors la force $\vec{F}$ induit une rotation de M autour de l'axe Δ dans l'autre sens.
- Si $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$, alors la force $\vec{F}$ ne provoquera pas de mouvement de rotation autour de Δ .

b. Calcul par la méthode du bras de levier

Le calcul du moment scalaire d'une force peut se faire plus simplement par une approche purement géométrique :

- La valeur absolue de $M_{\Delta}(\vec{F})$ est obtenue en écrivant $|M_{\Delta}(\vec{F})| = \|\vec{F}\| \times d$, avec d le bras de levier (la distance entre l'axe de rotation et la droite d'appui de la force).



- Le signe est obtenu en observant le schéma.

Exemple : Sur le schéma ci-contre, on observe un bras de levier : $d = OM \cdot \sin(\alpha)$ et la force induit un mouvement de rotation dans le sens négatif autour de $\vec{u}_{\Delta}$, d'où :

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = -F \cdot OM \cdot \sin(\alpha)$$

3. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

a. Enoncé

On peut à nouveau considérer le cas d'un mouvement autour d'un axe fixe. Dans ce cas, on pourrait écrire le théorème du moment cinétique par rapport à un point de l'axe, puis le projeter selon un vecteur unitaire colinéaire à l'axe : on obtient alors le théorème du moment cinétique scalaire.

Pour un point matériel de masse M soumis à des forces $\vec{F}_i$ dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}$) :

$$\frac{dL_{\Delta}(M)}{dt} = \sum_i M_{\Delta}(\vec{F}_i)$$

b. Application

Revenons sur le pendule simple. Sa vitesse s'écrit $\vec{v} = l\dot{\theta} \vec{U}_{\theta}$ et le paramètre d'impact par rapport à l'axe $\Delta = (Oy)$ est l . Son moment cinétique s'écrit donc :

$$L_{\Delta}(M) = ml^2\dot{\theta}$$

De même :

- $M_{\Delta}(\vec{T}) = 0$ car $\vec{T}$ est portée par la droite d'action (OM).
- $M_{\Delta}(\vec{P}) = -mgl\sin(\theta)$ car pour $\theta > 0$, le poids introduit un moment qui entraîne le mouvement dans le sens des θ décroissants.

On peut finalement écrire le théorème du moment cinétique :

$$\frac{dL_{\Delta}(M)}{dt} = M_{\Delta}(\vec{T}) + M_{\Delta}(\vec{P}) \Rightarrow ml^2\dot{\theta} = -mgl\sin(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

