

I] Approche phénoménologique : Lois de Kepler 1618

Les 3 lois de Kepler, obtenues par ce dernier en 1609 et 1618 sont des lois expérimentales qui décrivent les mouvements des planètes du système solaire. Elles ont été obtenues en s'appuyant sur les relevés observationnels de Tycho Brahe, c'est en les expliquant par sa loi de la gravitation en 1687 qu'Isaac Newton fit accepter ses lois de la mécanique comme des explications valables aux mouvements.

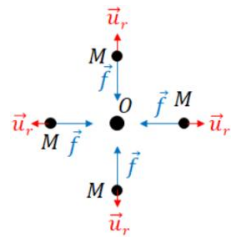
- Loi des orbites : les planètes parcourent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers.
- Loi des aires : Les aires balayées par le rayon vecteur pendant des intervalles de temps égaux sont égales.
- Loi des périodes : Il existe un rapport constant entre les carrés des périodes et les cubes des demi-grands axes, pour toutes les planètes.

La suite du chapitre est consacrée aux explications physiques de ces observations.

II] Forces centrales**1. Définition**

Une **force centrale** est une force qui est à tout instant **dirigée dans la direction d'un point O fixe dans le référentiel d'étude** appelé **centre de force**.

Ainsi, le système de coordonnées sphérique est privilégié pour étudier les forces centrales qui s'écrivent : $\vec{f} = f(r, \theta, \varphi) \vec{U}_r$.

**2. Conservation du moment cinétique**

Soit un point matériel situé en M de masse m soumis à un champs de forces centrales de résultante $\vec{f} = f(r, \theta, \varphi) \vec{U}_r$.

Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport au point O fixe dans un référentiel Galiléen.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = r\vec{U}_r \wedge f(r, \theta, \varphi)\vec{U}_r = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = \text{cste}}$$

a. Conséquence n°1 : Planéité du mouvement

Le moment cinétique du point matériel M par rapport à O est défini par : $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$.

Par propriété du produit vectoriel, $\vec{L}_O$ est orthogonal à $\vec{OM}$ et à $\vec{v}$. Ainsi, les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux au vecteur $\vec{L}_O$ qui est constant (en direction, sens et norme). On en déduit que les deux vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont à tous moments contenus dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}_O$.

A tout instant, **le mouvement du point matériel M a lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur $\vec{L}_O$ et contenant le centre de force O .**

Remarque : Comme le mouvement est plan, on utilisera dans la pratique une base cylindrique pour décrire le mouvement plutôt qu'une base sphérique : le moment cinétique est alors porté par le vecteur axial $\vec{U}_z$.

b. Conséquence n°2 : Constante des aires et loi des aires

Calculons le moment cinétique $\vec{L}_O$ du point matériel M par rapport au centre de force O :

$$\vec{L}_O = r\vec{U}_r \wedge m(\dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{U}_z$$

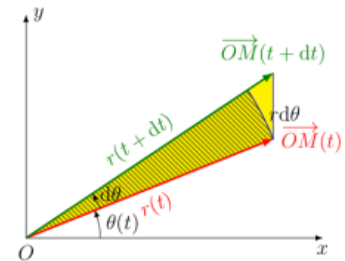
Ainsi, la conservation du moment cinétique impose la conservation du produit $r^2\dot{\theta}$ appelée constante des aires et notée c .

$$c = r^2\dot{\theta}$$

Interprétation géométrique : loi des aires

Au premier ordre, on peut assimiler l'aire balayée entre deux instants infiniment proches t et $t + dt$ à l'aire du triangle de surface :

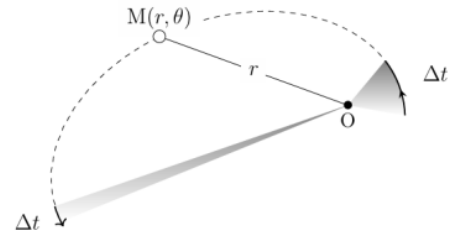
$$dA = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \times r \times r d\theta$$



Ainsi, l'aire balayée par unité de temps s'écrit : $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{2}$

En intégrant cette relation, comme c est une constante, on en déduit que l'aire balayée ΔA en une durée Δt s'écrit $\Delta A = \frac{c}{2} \Delta t$.

On retrouve la loi des aires de Kepler : « Les aires balayées par le segment OM pendant des intervalles de temps égaux sont égales ».



III] Etude énergétique des mouvements à forces centrales conservatives

1. Force centrales conservatives

On étudie plus spécifiquement les forces centrales qui sont conservatives. Si la force est **conservative** alors il existe une énergie potentielle E_p :

$$\vec{f} = f(r, \theta, z) \vec{u}_r = -\vec{\text{grad}}(E_p) \Rightarrow \begin{cases} f(r, \theta, r) = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \\ 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \end{cases}$$

On en déduit que E_p ne dépend que de r , donc $\vec{f}$ aussi. Ainsi les forces centrales conservatives s'écrivent :

$$\vec{f} = f(r) \vec{u}_r$$

2. Energie mécanique et énergie potentielle effective

Considérons un système est soumis à une unique force centrale conservative. Son énergie mécanique est conservée (**TEM**) et sa valeur est imposée par les conditions initiales ($\overrightarrow{OM}(t=0)$ et $\vec{v}(t=0)$). Exprimons cette énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 + E_p(r)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} + E_p(r)}_{E_{p,eff}(r)}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

Tout se passe comme si le système se déplaçait uniquement selon la coordonnée r dans l'énergie potentielle effective : $E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} + E_p(r)$

Nous allons illustrer cela sur le cas gravitationnel, mais la démarche reste valable pour tout mouvement à force centrale conservative.

3. Forces Newtoniennes

On appelle **forces Newtoniennes**, les forces centrales conservatives s'écrivant sous la forme :

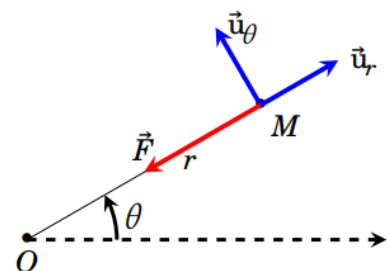
$$\vec{f}(r) = \frac{a}{r^2}, \text{ avec } a \text{ une constante réelle.}$$

Exemples	Force de gravitation subie par une masse ponctuelle m .	Force électrostatique subie par une charge ponctuelle q .
Forces	$\vec{F}_g = -G \frac{m m'}{r^2} \vec{U}_r$	$\vec{F}_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \vec{U}_r$
Energie potentielle	$E_{pg} = -G \frac{m m'}{r}$	$E_{pe} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r}$

4. Mouvement dans un champs de force Newtonien

On considère une planète du système solaire de masse m située en M dont on décrit le mouvement dans le référentiel de Copernic (attaché au centre de masse du système solaire, d'orientation fixée par rapport à trois étoiles lointaines).

Pour cette planète, le bilan des forces contient l'interaction gravitationnelle entre elle et le soleil (astre attracteur de masse m') situé en O et les autres planètes. Puisque l'interaction entre les planètes est très faible devant celle créée par le soleil, on ne gardera que cette dernière.

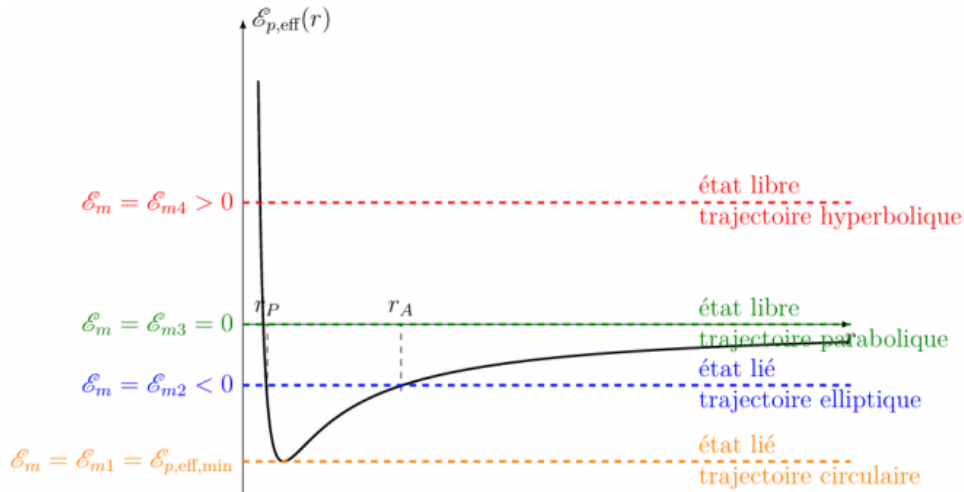


Remarque : Notons que la mise en équations serait exactement la même pour l'étude d'un satellite dans le référentiel géocentrique. Nous appliquerons donc les résultats obtenus indifféremment à l'une ou l'autre situation.

L'énergie mécanique s'exprime :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} - G \frac{mm'}{r}$$

On constate donc la présence à la fois d'une part attractive (dominante pour r moyen) et d'une part répulsive (dominante quand $r \rightarrow 0$) dans l'énergie potentielle effective. On peut alors la tracer et discuter qualitativement les trajectoires :



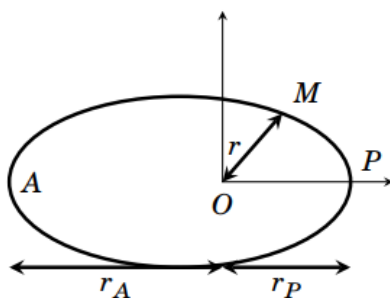
- Le cas $E_m < 0$ (E_{m2} sur le schéma) correspond à l'impossibilité de s'éloigner indéfiniment du Soleil. On parle d'**état lié**, donc la trajectoire est une orbite.

Sans connaître le détail de la trajectoire (il faudrait résoudre les équations de Newton), on peut déjà repérer sur le graphe les valeurs extrêmes (r_P et r_A) de la distance Soleil-planète.

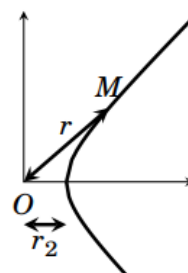
On comprend que le cas $E_m = E_{m1} = E_{p,eff,min}$ correspond alors à $r = \text{cste}$, donc à une trajectoire circulaire. Nous admettrons que, dans les autres cas, il s'agit d'une trajectoire elliptique.

- Le cas $E_m > 0$ (E_{m4} sur le schéma) permet de s'éloigner indéfiniment du Soleil : on parle d'**état de diffusion**. On admet que la trajectoire dans ce cas est une branche d'hyperbole.
- Le cas $E_m = 0$ (E_{m3} sur le schéma), artificiel, permet aussi de s'éloigner indéfiniment. On admet que dans ce cas, la trajectoire du système est une parabole.

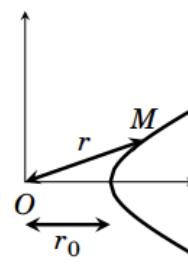
Dans tous les cas, la trajectoire est donc une conique (ellipse, parabole ou hyperbole).



Trajectoire elliptique $E_m < 0$



hyperbolique,
 $E_m > 0$



parabolique,
 $E_m = 0$

5. Cas particulier de la trajectoire circulairea. *Mouvement uniforme*

Dans ce cas d'une trajectoire circulaire, la vitesse est purement orthoradiale, on peut donc exprimer sa norme en fonction de la constante des aires :

$$\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{U}_\theta \Rightarrow \|\vec{v}\| = r|\dot{\theta}| = \frac{|c|}{r}$$

Donc $\|\vec{v}\|$ est constante, par conséquent, le mouvement circulaire d'un système soumis à une unique force centrale est nécessairement uniforme.

b. *Période*

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à d'une planète de masse m qui décrit une trajectoire circulaire de rayon R autour d'une étoile de masse m' (idem un satellite autour d'une planète). On se place dans le référentiel lié au centre de force, supposé galiléen à l'échelle du mouvement.

$$m\vec{a} = \vec{F}_g \Leftrightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -G\frac{mm'}{R^2} \\ mR\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{R^3}} \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$v = R\dot{\theta} = R\sqrt{\frac{Gm'}{R^3}} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{Gm'}{R}}}$$

De plus, comme le mouvement est uniforme la période de révolution s'exprime :

$$T = \frac{2\pi R}{v} \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{Gm'}}$$

En élevant au carré, on retrouve la loi des période de Kepler pour le cas circulaire :

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{Gm'}}$$

c. *Energie mécanique*

L'énergie mécanique s'exprime :

$$E_m = E_c + E_{pg}(r) = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm'}{R}$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\frac{Gm'}{R} - G\frac{mm'}{R} \Leftrightarrow \boxed{E_m = -G\frac{mm'}{2R}}$$

Application : On peut lire dans la presse que l'ISS décrit 15,5 orbites par jour.

- 1) Déterminer la période du mouvement de l'ISS.
- 2) Déterminer l'altitude de l'ISS.
- 3) Déterminer la vitesse de l'ISS.
- 4) Déterminer l'énergie mécanique de l'ISS de masse $m = 490\text{ t}$

Correction :

Système : ISS, assimilée à un point matériel ; Eférentiel : référentiel géocentrique, supposé galiléen à l'échelle du mouvement de l'ISS .

Bilan des forces : force gravitationnelle exercée par la Terre sur l'ISS $\vec{f} = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{u}_r$

1. Période : $T = \frac{24\text{ h}}{15,5} = 1,54\text{ h} = 5574\text{ s}$

2. D'après la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$.

Ainsi $R = \left(\frac{T^2}{4\pi^2}GM_T\right)^{1/3}$

Soit l'altitude vaut : $h = R - R_T = \left(\frac{T^2}{4\pi^2}GM_T\right)^{1/3} - R_T = 424\text{ km}$

3. Le mouvement est uniforme, donc on peut en déduire $v = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = 7658\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

4. Énergie mécanique : $\mathcal{E}_m = -\frac{GmM_T}{2(R_T + h)} = -1,44 \cdot 10^{13}\text{ J}$

6. Cas du mouvement elliptique

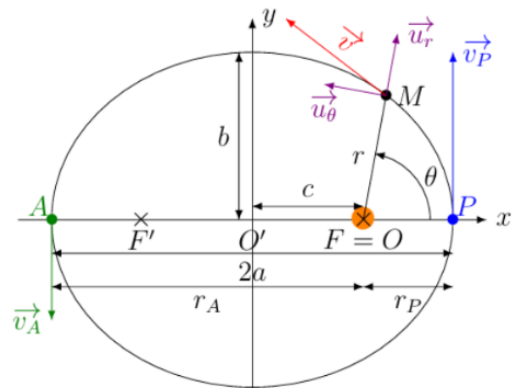
a. Description

Une ellipse est une courbe plane qui peut être décrite par plusieurs équations (équivalentes) :

- Equation Cartésienne dans le plan (O'xy) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec a le demi-grand axe et b le demi-petit axe.

- Equation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = b \cos(\omega t) \end{cases}$

- Equation polaire $r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$, avec $p > 0$ le paramètre de l'ellipse et $e = \frac{c}{a}$ l'excentricité.



Une ellipse possède deux foyers F et F' , tels que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Le point de la trajectoire le plus éloigné du centre de force O est appelé l'**aphélie** si O est le soleil, l'**apogée** si O est la Terre.

Le point de la trajectoire le plus proche du centre de force O est appelé le **périhélie** si O est le soleil, le **périgée** si O est la Terre.

b. Période du mouvement

La démonstration de la 3^{ème} loi de Kepler dans le cas d'un mouvement elliptique est hors programme, et nous admettons donc la généralisation de ce qui a été montré pour un mouvement circulaire, en remplaçant le rayon du cercle par le demi-grand axe de l'ellipse :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm'}$$

c. Energie mécanique

On peut également généraliser l'expression de l'énergie mécanique au cas elliptique. Pour le montrer, écrivons que l'énergie cinétique radiale est nulle au l'apoastre et au périastre. Dans ce cas, l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective :

$$E_m = E_{c,rad} + E_{p,eff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{c^2}{r^2} - G\frac{mm'}{r}$$

$$E_{c,rad}(r = r_{A,P}) = 0 \Leftrightarrow E_m - \frac{1}{2}m\frac{c^2}{r^2} + G\frac{mm'}{r} = 0$$

On obtient un polynôme du 2nd degré sur r avec deux racines r_A et r_P :

$$r^2 + r\frac{Gmm'}{E_m} - \frac{mc^2}{2E_m} = 0 \quad \text{en } r = r_A \text{ et } r = r_P$$

De plus, un polynôme du 2nd degré à deux solutions réelles peut s'exprimer sous la forme :

$$(r - r_1)(r - r_2) = 0 \Leftrightarrow r^2 - r(r_1 + r_2) + r_1r_2 = 0$$

On en déduit :

$$2a = r_A + r_P = -\frac{Gmm'}{E_m} \Rightarrow E_m = -G\frac{mm'}{2a}$$

Application : La trajectoire de l'ISS est en réalité elliptique, son altitude variant entre 330 km et 420 km.

- 1) Déterminer le demi-grand axe de la trajectoire de l'ISS.
- 2) Déterminer la période de l'ISS.
- 3) Déterminer l'énergie mécanique de l'ISS.
- 4) Exprimer la norme v de la vitesse de l'ISS en un point quelconque de la trajectoire elliptique en fonction de m , M_T , G , r et a . Comment évolue-t-elle avec le rayon r ?
- 5) Déterminer les vitesses minimale et maximale de l'ISS.

Correction :

1. Système : ISS, satellite S de la Terre de masse m Référentiel : référentiel géocentrique considéré galiléen à l'échelle du mouvement du satellite.

Bilan des actions mécaniques : Force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite

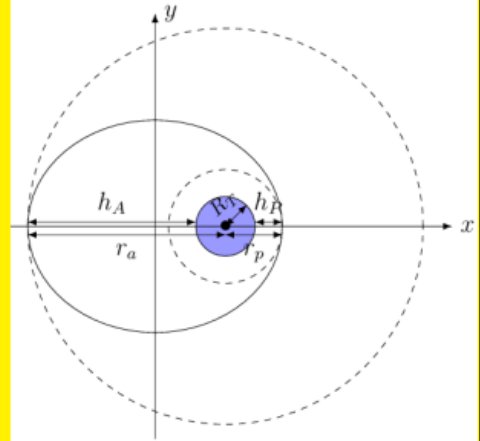
$$\overrightarrow{F_{T/S}} = -G \frac{M_T m}{r^2} \overrightarrow{u_r}$$

avec $r = \|\overrightarrow{TS}\|$.

L'énoncé donne l'altitude du périégée : $h_P = 330$ km et l'altitude de l'apogée $h_A = 420$ km.

À l'aide du schéma de l'ellipse, on détermine la relation : $2a =$

$$R_T + h_P + R_T + h_A \text{ Ainsi } a = R_T + \frac{h_A + h_P}{2} = 6,75 \cdot 10^3 \text{ km}$$



2. D'après la 3^e loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi}{GM_T}$, soit $T = \sqrt{\frac{4\pi a^3}{GM_T}} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ s} = 1,52 \text{ h}$

3. Énergie mécanique de l'ISS en orbite elliptique : $\mathcal{E}_m = -\frac{GM_T m}{2a}$ A.N. : $\mathcal{E}_m = -1,5 \cdot 10^{13} \text{ J}$

4. L'ISS est soumis à une unique force conservative, donc l'énergie mécanique se conserve. Par définition de l'énergie mécanique : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r}$ Que l'on peut égaliser avec l'expression de l'énergie mécanique sur un mouvement elliptique :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r} = -\frac{GmM_T}{2a}$$

Il reste à isoler v : $\frac{1}{2}v^2 = GM_T \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$ Soit $v = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}$

Quand le rayon r augmente, la vitesse v diminue. Autrement dit, la vitesse de l'ISS est d'autant plus faible qu'il se trouve éloignée de la Terre. C'est une conséquence de la loi des aires : le rayon vecteur balaye des aires égales en des temps égaux. Quand l'ISS est loin de la Terre, la distance parcourue est plus faible que lorsque l'ISS est proche de la Terre, donc la vitesse est plus faible.

5. La vitesse de l'ISS est minimale quand il passe par l'apogée :

$$v_{\min} = v_A = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a} \right)} = 7634 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse de l'ISS est maximale quand il passe par le périégée :

$$v_{\max} = v_P = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{2a} \right)} = 7737 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

IV] Satellites terrestres**1. Quel orbite, quelle mission ?**

Les orbites des satellites terrestres peuvent avoir de nombreuses formes et orientations : certaines sont circulaires ou au contraire en forme d'ellipse très allongée. Elles peuvent se situer à basse altitude juste au-dessus de l'atmosphère terrestre (250 km) ou dépasser 30000 km. L'orbite d'un satellite artificiel est choisie pour répondre au mieux aux besoins de la mission. La plupart des satellites utilisent un des quatre types d'orbite suivants :

- L'**orbite géostationnaire** est une orbite circulaire située dans le plan de l'équateur à une altitude de 35786 km du sol. A cette altitude la période de révolution du satellite correspond exactement à la période de rotation de la Terre, soit 23 heures, 56 minutes et 4 secondes. Vu de la Terre, un satellite géostationnaire semble immobile dans le ciel : c'est l'orbite parfaite pour les **satellites de télécommunications** et pour certains **satellites d'observation** (météo) qui doivent couvrir une zone fixe.
- L'**orbite polaire** est une **orbite circulaire basse** (par convention entre 300 et 1000 km d'altitude) dont l'inclinaison, proche de 90° par rapport au plan de l'équateur, la fait passer au-dessus ou près des pôles. Un satellite situé sur une orbite polaire passe régulièrement au-dessus de tous les points de la surface grâce à la rotation de la Terre. Les orbites polaires sont généralement des orbites héliosynchrones : ce type d'orbite conserve un angle constant avec la direction Terre-Soleil c'est-à-dire que le plan d'orbite tourne de 360° par an.
- Les orbites héliosynchrones permettent de passer toujours à la même heure solaire locale au-dessus d'un lieu donné : l'éclairage identique des prises de photo du lieu permet de faire ressortir les changements. Cette caractéristique en fait une orbite idéale pour des **satellites d'observation** de la Terre.
- L'**orbite basse** se situe juste au-dessus de l'atmosphère terrestre à une altitude où la traînée ne freine pas trop la vitesse du satellite (par convention l'orbite basse se situe à une altitude inférieure à 2000 km). Elle est utilisée par les **satellites scientifiques** qui explorent l'espace lointain. Le **télescope Hubble**, par exemple se situe sur une orbite de 610 km. On trouve également sur ce type d'orbite les **satellites de radioamateur** et les constellations de **téléphonie mobile** ou de télédétection terrestre.
- L'**orbite moyenne** culmine généralement à une altitude de 20000 km avec une période de 12 heures. L'orbite située en dehors de l'atmosphère terrestre est très stable. Les signaux envoyés par le satellite peuvent être reçus sur une grande partie de la surface du globe terrestre. C'est l'altitude retenue pour les **satellites de navigation** comme le système GPS. Un peu plus bas, à 8063 km, est prévue la constellation de satellites O3B pour la distribution d'Internet.
- L'**orbite haute** a un apogée qui se situe à une altitude supérieure à l'orbite géostationnaire. La **Russie** utilise ce type d'orbite pour certains de ses **satellites de télécommunications**. L'orbite de Molnia permet une couverture 24 h sur 24 du territoire de la Russie avec une constellation de trois satellites. Cette orbite est utilisée car la Russie ne peut lancer de satellites géostationnaires depuis ses bases spatiales toutes situées à des latitudes trop élevées et les satellites géostationnaires ne peuvent pas couvrir la fraction du territoire russe située à une latitude supérieure à 81°.



Schéma à l'échelle montrant la Terre, les principales orbites (orbites basse, moyenne et géostationnaire) utilisées par les satellites, les vitesses et les périodes orbitales à différentes altitudes ainsi que la position de quelques satellites ou constellations de satellites remarquables : GPS, GLONASS, Galileo and Compass, Station spatiale internationale, télescope Hubble et la constellation Iridium.

2. Satellites géostationnaires

a. Définition

Un **satellite géostationnaire** est un satellite qui reste **constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre**.

b. Caractéristiques du mouvement des satellites géostationnaires

Le mouvement d'un satellite géostationnaire est contraint :

- La conservation du moment cinétique impose que le mouvement du satellite géostationnaire est plan et le plan de la trajectoire du satellite contient le centre de force, c'est-à-dire le centre de la Terre.
- De plus, pour être géostationnaire, il doit rester à chaque instant à la verticale du même point P de la Terre. Par conséquent, le plan du mouvement du satellite géostationnaire doit être confondu avec le plan du mouvement du point P de la surface de la Terre. Or le mouvement d'un point P de la surface de la Terre dans le référentiel géocentrique est un mouvement circulaire dont le centre est sur l'axe de rotation de la Terre (pôle Sud-pôle Nord). Le plan du mouvement du point P est donc perpendiculaire à l'axe (pôle Sud pôle Nord).

Ainsi le plan du mouvement du satellite géostationnaire doit contenir le centre de la Terre et doit être perpendiculaire à l'axe (pôle Sud-pôle Nord). Ce plan est unique : c'est le plan de l'équateur.

Le plan de la trajectoire d'un satellite géostationnaire est le plan de l'équateur.

c. Période

Un satellite géostationnaire reste à chaque instant à la verticale du même point de la surface de la Terre.

Par conséquent, la période du mouvement du satellite géostationnaire doit être de 24 h (plus précisément 23 h 56 min 4 s : durée d'un jour sidéral, c'est-à-dire d'une révolution de la Terre sur elle-même).

d. Altitude

La loi des période de Kepler permet de déterminer le rayon R_g de l'orbite :

$$\frac{T^2}{R_g^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \Leftrightarrow R_g = \left(\frac{Gm_T T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Or $R_g = R_T + h$, donc $h = R_g - R_T = \left(\frac{Gm_T T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R_T$

Application numérique :

Avec $T = 23 \times 60 \times 60 + 56 \times 60 + 4 = 86164 \text{ s}$ et $R_T = 6370 \times 10^3 \text{ m}$

$$h = 3,6 \times 10^7 \text{ m} = 36 \times 10^3 \text{ km}$$

3. Vitesses cosmiques*a. Vitesse en orbite basse*

La première vitesse cosmique notée v_{c1} , est la **vitesse en orbite basse**, c'est-à-dire la vitesse d'un objet satellisé en mouvement circulaire autour d'un astre à une altitude très petite devant le rayon de l'astre.

Application :

- 1) Etablir l'expression de la première vitesse cosmique.
- 2) Faire l'application numérique pour la Terre.

Correction :

1. On s'intéresse à un point $M(m)$ en orbite basse autour d'un astre de masse m_O et de rayon R_O . Le rayon de la trajectoire circulaire basse vaut : $R = R_O + h \approx R_O$ (altitude h très petite devant R_O). En utilisant l'expression de la vitesse établie dans précédemment : $v_{c1} = \sqrt{\frac{Gm_O}{R_O}}$

2. La première vitesse cosmique d'un objet en orbite basse autour de la Terre de rayon R_T et de masse M_T s'exprime selon $v_{c1} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$; A.N. : $v_{c1} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

b. Vitesse de libération

La deuxième vitesse cosmique ou **vitesse de libération** est la vitesse minimale à communiquer à un objet situé initialement à la surface de la planète pour qu'il puisse échapper à l'attraction de la planète, autrement dit pour qu'il puisse partir de la planète et s'en éloigner à l'infini.

Application :

- 1) Quelle est la valeur minimale de l'énergie mécanique pour que le système quitte l'attraction de l'astre ? Quelle est alors la trajectoire de l'objet ?
- 2) En déduire l'expression de la vitesse de libération.
- 3) Faire l'application numérique pour la Terre.

Correction :

1. Pour qu'un objet, situé sur l'astre, puisse se libérer de l'attraction de l'astre, il doit avoir une énergie mécanique positive ou nulle. La vitesse minimale que doit posséder l'objet situé sur l'astre correspond au cas où son énergie mécanique est nulle.

2. Énergie mécanique minimale de l'objet sur l'astre, de rayon R_O , pouvant se libérer de l'attraction de l'astre :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_\ell^2 - \frac{Gmm_O}{R_O} = 0 \text{ Soit } \frac{1}{2}mv_\ell^2 = \frac{Gmm_O}{R_O}, \text{ soit } v_\ell = \sqrt{2\frac{Gm_O}{R_O}} = \sqrt{2}v_{c1}$$

3. Pour un objet posé sur Terre, la vitesse de libération s'exprime selon :

$$v_\ell = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{2}y_{c1} ; \text{ A.N. :}$$

$$v_\ell = 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$