

Mouvements dans un champs électrique seul

□ Exercice 21.1. Cavity accélératrice d'électrons ★

1 Par définition du potentiel,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{d'où} \quad -E_0 = -\frac{dV}{dx} \quad \text{donc} \quad \int_{V_1}^{V_2} dV = E_0 \int_0^d dx.$$

Par intégration,

$$V_2 - V_1 = E_0 d \quad \text{d'où} \quad \boxed{E_0 = \frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{U}{d}}.$$

Puisque $E_0 > 0$ alors $V_2 > V_1$, ce qui donne le sens de U .2 Par identification des deux expressions de E_0 ,

$$E_0 = \frac{U}{d} = \frac{m}{e} \alpha \quad \text{d'où} \quad \boxed{\alpha = \frac{eU}{md}}.$$

3 Par conservation de l'énergie mécanique au travers de la cavité,

$$E_m \Big|_{x=0}^{\uparrow} = \frac{1}{2} m v_0^2 - e \times 0 \Big|_{x=0d}^{\uparrow} = \frac{1}{2} m v_1^2 - eU \quad \text{d'où} \quad v_1^2 = v_0^2 + \frac{2eU}{m} = v_0^2 + 2\alpha d$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2\alpha d}}.$$

4 Par application du PFD à l'électron,

$$m \frac{dv}{dt} = +e \times \frac{m}{e} \alpha \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dt} = \alpha,$$

la constante α est donc l'**accélération de l'électron** dans la cavité. Par intégration, on en déduit

$$\int_{v_0}^{v_1} dv = \alpha \int_0^{t_1} dt \quad \text{soit} \quad v_1 - v_0 = \alpha t_1$$

ce qui donne

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2\alpha d} - v_0}{\alpha} \quad \text{d'où} \quad \boxed{t_1 = \frac{v_0}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{2\alpha d}{v_0^2}} - 1 \right)}.$$

□ Exercice 21.2. Détermination d'un champ électrique ★★★

Un schéma d'ensemble, récapitulant les différentes notations utiles, est représenté figure 1.

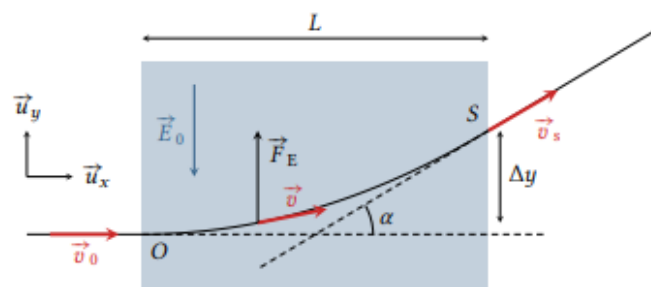


Figure 1 – Schéma d'ensemble des notations utilisées.

1 L'électron subit la force de Lorentz électrique $\vec{F}_E = -e\vec{E}_0$ et son poids qui est négligeable. Compte tenu de la trajectoire, la force $\vec{F}_E$ est dirigée selon $+\vec{u}_y$ et **le champ électrique $\vec{E}_0$ est donc dirigé selon $-\vec{u}_y$.**

2 Par application du PFD à l'électron dans le référentiel du laboratoire,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = -e\vec{E}_0$$

soit en projetant

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = +eE_0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} v_x = A \\ v_y = \frac{eE_0}{m}t + B \end{cases}$$

avec A et B deux constantes. Or à l'instant initial où l'électron entre dans la zone de champ $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$, d'où on déduit $A = v_0$ et $B = 0$. Ainsi,

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{eE_0}{m}t \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = v_0t + A' \\ y = \frac{eE_0}{2m}t^2 + B' \end{cases}$$

et comme à l'instant initial la particule se trouve au point origine O alors $A' = B' = 0$. Les lois horaires s'écrivent donc

$$\begin{cases} x = v_0t \\ y = \frac{eE_0}{2m}t^2 \end{cases}$$

d'où on déduit l'équation de la trajectoire en remplaçant $t = x/v_0$ dans l'expression de y ,

$$y(x) = \frac{eE_0}{2mv_0^2}x^2.$$

3 Comme la vitesse est tangente à la trajectoire, on constate qu'en tout point $\vec{v} \cdot \vec{F}_E > 0$: la force a donc un effet moteur, donc

$$\Delta E_c > 0.$$

Appliquons le TEC à l'électron, et commençons par calculer le travail de la force de Lorentz. En notant O le point d'entrée et S le point de sortie de la zone de champ électrique,

$$W_{OS}(\vec{F}_E) = \int_{OS} -e\vec{E}_0 \cdot d\vec{M} = -e\vec{E}_0 \cdot \vec{OS} = +eE_0 \Delta y.$$

L'équation de la trajectoire permet de calculer le décalage Δy :

$$\Delta y = y(L) - y(0) = \frac{eE_0 L^2}{2mv_0^2}.$$

Ainsi, d'après le TEC,

$$\Delta E_c = W_{OS}(\vec{F}_E) = \frac{e^2 E_0^2 L^2}{2mv_0^2}$$

d'où il vient

$$E_0 = \sqrt{\frac{2mv_0^2 \Delta E_c}{L^2 e^2}}.$$

En réintroduisant $E_{c0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ il vient

$$E_0 = \sqrt{\frac{4 E_{c0} \Delta E_c}{L^2 e^2}} = 5,6 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

4 On constate sur la figure 1 que l'angle de déviation de la trajectoire correspond également à l'inclinaison de la vitesse de sortie par rapport à la vitesse initiale. Ainsi,

$$\tan \alpha = \frac{v_{s,y}}{v_{s,x}} = \frac{eE_0 t_s}{mv_0} = \frac{eE_0 L}{mv_0^2}$$

d'où

$$\tan \alpha = \frac{2eE_0 L}{E_{c0}}.$$

Mouvements dans un champs magnétique seul

□ Exercice 21.3. Mouvement cyclotron hélicoïdal ★★

✎ Correction — 1 - Par définition,

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

puis par dérivation

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z.$$

2 - Étudions le mouvement de la particule dans le référentiel $\mathcal{R}$. Elle subit la force de Lorentz,

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B} = qRB\dot{\theta} \vec{e}_r.$$

La PFD donne alors les trois équations du mouvement par projection dans la base polaire,

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = qRB\dot{\theta} \\ mR\ddot{\theta} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Question d'analyse 1 - Justifier l'expression de la force de Lorentz.

Question d'analyse 2 - Pourquoi le poids de la particule n'apparaît-il pas dans le PFD ?

3 - D'après la deuxième équation issue du PFD,

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \text{donc} \quad \dot{\theta} = \text{cte}.$$

La pulsation cyclotron est par définition la valeur absolue de la vitesse angulaire de la particule. La première équation donne alors

$$\dot{\theta} = -\frac{qB}{m} \quad \text{d'où} \quad \omega_c = |\dot{\theta}| = \frac{qB}{m}.$$

Question d'analyse 3 - Quel est le signe de $\dot{\theta}$? Comment ce signe se manifeste-t-il sur l'allure de la trajectoire ?

4 - Le repère est construit tel que

$$\vec{v}_0 = v_0 \sin \alpha \vec{e}_x + v_0 \cos \alpha \vec{e}_z$$

Question d'analyse 4 - En s'appuyant sur un ou deux schéma(s), justifier l'expression de $\vec{v}_0$: présence du sin et du cos, absence de composante sur $\vec{e}_y$.

De plus, à l'instant initial, la particule se trouve sur l'axe (Oy) : on a donc à cet instant

$$\vec{e}_r = \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = -\vec{e}_x.$$

Question d'analyse 5 - Justifier à l'aide d'un schéma ce lien entre les deux bases.

On identifie donc

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{=} R\dot{\theta} (-\vec{e}_x) + \dot{z} \vec{e}_z = R\omega_c \vec{e}_x + \dot{z} \vec{e}_z \\ & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} v_0 \sin \alpha \vec{e}_x + v_0 \cos \alpha \vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$R\omega_c = v_0 \sin \alpha \quad \text{donc} \quad R = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB}.$$

Question d'analyse 6 - Justifier la disparition du signe – devant $\vec{e}_x$ dans l'expression de $\vec{v}_0$ légendée « base ».

5 - Par définition de la vitesse angulaire, la particule parcourt un cercle en projection dans le plan (Oxy) au bout d'une durée T telle que

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} \quad \text{soit} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_c}.$$

Par ailleurs, d'après les questions précédentes,

$$\dot{z} = v_0 \cos \alpha.$$

Question d'analyse 7 - Établir explicitement l'expression de $\dot{z}$.

Ainsi, pendant la durée T , la coordonnée z augmente de $\dot{z}T$, d'où

$$\delta = v_0 \cos \alpha \times \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \cos \alpha \frac{R}{\sin \alpha} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\delta = \frac{2\pi R}{\tan \alpha}}.$$

Question d'analyse 8 - Expliquer comment apparaît le terme $R/\sin \alpha$ dans le calcul.

□ Exercice 21.4. Mouvement cyclotron en coordonnées cartésiennes ★★

1 Le poids de la particule est négligeable, elle ne subit que la force de Lorentz,

$$\vec{F}_L = q \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les équations du mouvement se déduisent du PFD,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{bmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 En projection sur l'axe (Oz),

$$\dot{v}_z = 0 \quad \text{donc} \quad v_z = \text{cte} \underset{\text{CI}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad z = \text{cte} \underset{\text{CI}}{=} 0.$$

Le mouvement a donc intégralement lieu dans le plan $z = 0$.

3 Par définition de $\underline{V}$,

$$i \frac{qB}{m} \underline{V} = \frac{qB}{m} (iv_x - v_y)$$

et d'après le PFD

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \dot{v}_x + i\dot{v}_y = \frac{qB}{m} (v_y - iv_x).$$

On a donc bien

$$\boxed{\frac{d\underline{V}}{dt} + i \frac{qB}{m} \underline{V} = 0.}$$

4 Les solutions de cette équation sont de la forme

$$\underline{V}(t) = \underline{A} \exp\left(-i \frac{qB}{m} t\right)$$

avec à l'instant initial

$$\underline{V}(t=0) \underset{\text{expr}}{=} \underline{A} \underset{\text{CI}}{=} v_0 + i \times 0$$

d'où

$$\boxed{\underline{V}(t) = v_0 \exp\left(-i \frac{qB}{m} t\right).}$$

En intégrant une deuxième fois,

$$\underline{X}(t) = -\frac{mv_0}{iqB} \exp\left(-i \frac{qB}{m} t\right) + \underline{A}' = i \frac{mv_0}{qB} \exp\left(-i \frac{qB}{m} t\right) + \underline{A}'.$$

À l'instant initial,

$$\underline{X}(t=0) \underset{\text{expr}}{=} i \frac{mv_0}{qB} + \underline{A}' \underset{\text{CI}}{=} 0$$

d'où

$$\boxed{\underline{X}(t) = i \frac{mv_0}{qB} \left[\exp\left(-i \frac{qB}{m} t\right) - 1 \right].}$$

5 Par définition de $\underline{X}$,

$$x(t) = \operatorname{Re} \underline{X}(t) = \frac{mv_0}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad \text{et} \quad y(t) = \operatorname{Im} \underline{X}(t) = \frac{mv_0}{qB} \left[\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1 \right].$$

Par l'identité trigonométrique fondamentale,

$$\left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2 \sin^2\left(\frac{qB}{m}t\right) + \left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2 \cos^2\left(\frac{qB}{m}t\right) = \left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2$$

ce qui permet d'identifier

$$x(t)^2 + \left(y + \frac{mv_0}{qB}\right)^2 = \left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2.$$

On reconnaît alors l'équation cartésienne d'un cercle de rayon

$$R_c = \frac{mv_0}{|q|B}$$

et dont le centre Ω a pour coordonnées

$$x_\Omega = 0 \quad \text{et} \quad y_\Omega = -\frac{mv_0}{qB}.$$

Rappelons que l'équation cartésienne d'un cercle de centre Ω et de rayon R s'écrit

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

Le signe de la charge q n'étant pas précisé jusqu'à présent, il ne faut pas oublier la valeur absolue dans l'expression de rayon.

6 Voir figure 6. Si $q > 0$ alors le centre du cercle trajectoire se trouve à une ordonnée $y_\Omega < 0$, et inversement si $q < 0$.

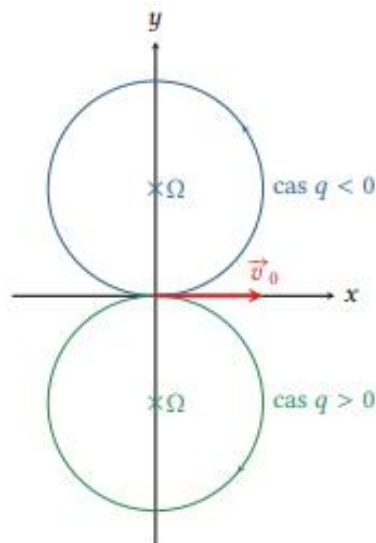


Figure 6 – Trajectoire cyclotron.

On constate que les trajectoires tracées sont bien sûr cohérentes avec la force de Lorentz à l'instant initial,

$$\vec{F}_L(t=0) = q \vec{v}_0 \wedge \vec{B} = -qv_0 B \vec{e}_y,$$

qui indique si la particule doit être déviée vers le haut ou le bas sur le schéma.

Mouvements dans un champs électrique et magnétique

□ Exercice 21.5. Spectrométrie de masse ★

1 Les protéines sont chargées positivement. Pour les accélérer, le champ électrique doit donc être dirigé de P_1 vers P_2 et comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, il faut donc que **la plaque P_2 soit portée à un potentiel inférieur à la plaque P_1 .**

L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_{pe} = zeV$ où V est le potentiel électrique. Ainsi, son énergie mécanique est conservée, soit en l'exprimant entre les plaques P_1 où la vitesse est nulle et P_2

$$0 + ze V(P_1) = \frac{1}{2} m v^2 + ze V(P_2)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = ze [V(P_1) - V(P_2)]$$

$$v = \sqrt{\frac{2zeU}{m}}$$

2 Dans la zone de séparation, l'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz magnétique $\vec{F}_B = ze \vec{v} \wedge \vec{B}$. Comme elle est orthogonale à la vitesse, alors sa puissance est nulle, et d'après le théorème de la puissance cinétique,

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad E_c = \text{cte}.$$

Le mouvement de l'ion est bien uniforme.

3 La trajectoire étant circulaire plane, on la décrit dans la base de Frénet.

$$m \vec{a} = \vec{F}_L \quad \text{soit} \quad m \left(\frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n \right) = qvB \vec{e}_n$$

On déduit de la projection sur $\vec{e}_n$

$$R = \frac{mv}{zeB}.$$

En remplaçant v par son expression,

$$R = \frac{m}{zeB} \sqrt{\frac{2zeU}{m}} \quad \text{soit} \quad R = \sqrt{\frac{2mU}{zeB^2}}.$$

4 L'abscisse y de détection est égale à $2R$. On en déduit la masse d'une protéine de charge ze ,

$$m = \frac{zeR^2B^2}{2U} \quad \text{d'où} \quad M = \frac{zeR^2B^2}{2U} N_A$$

Les deux mesures pour $z = 1$ et 2 conduisent à une masse molaire de $1,3 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Cette valeur est élevée, mais les protéines sont des grosses molécules : une protéine moyenne compte typiquement 200 acides aminés, formés eux-mêmes de quinze à vingt atomes différents.

□ Exercice 21.6. Cyclotron ★★

- **Système** : un proton ;
- **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen ;
- **Bilan des forces** : le proton n'est soumis qu'à la force de Lorentz (qui diffère en fonction des zones), devant laquelle le poids est négligeable.

1 Dans un dee, seul un champ magnétique est présent. La force de Lorentz exprimée dans la base de Frénet s'écrit

$$\vec{F}_L = e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B} = ev\vec{e}_t \wedge B\vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \vec{F}_L = qvB\vec{e}_n.$$

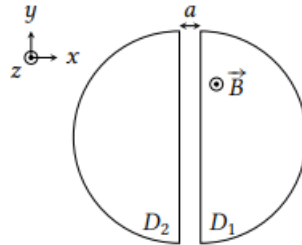


Figure 7 – Cyclotron.

Il faut savoir que la force de Lorentz est forcément dirigée vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire lorsqu'elle est la seule mise en jeu, et donc portée par $\vec{e}_n$. Le retrouver à chaque fois est fastidieux, et souvent source d'erreur.

D'après le PFD,

$$m \left(\frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n \right) = qvB\vec{e}_n$$

La projection sur $\vec{e}_t$ montre que le mouvement est uniforme à la vitesse v , celle sur $\vec{e}_n$ conduit à l'expression du rayon R :

$$R = \frac{mv}{eB}$$

La trajectoire dans un dee est un demi-cercle de longueur πR , parcourue en un temps

$$\Delta t = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 22 \text{ ns}.$$

On remarque que Δt ne dépend pas de la vitesse du proton, mais seulement du champ appliqué au dee.

2 Pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dees, il faut que la force électrique qu'il subit soit alternativement orientée selon $+\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_2 à D_1 et selon $-\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_1 à D_2 . En négligeant le temps de passage dans l'espace entre les dees ($a \ll \pi R$), il faut donc qu'une demi-période de la tension appliquée soit égale à Δt , soit pour la période

$$T = 2\Delta t = \frac{2\pi m}{eB} \quad \text{et} \quad f = \frac{eB}{2\pi m} = 23 \text{ MHz}.$$

Utiliser une tension harmonique plutôt qu'une tension crête à l'intérêt de regrouper tous les protons pour que leur passage dans les dees soit en phase avec la tension, ce qui permet aux impulsions du faisceau d'être plus puissantes. De plus, en pratique, une tension crête requiert beaucoup d'harmoniques qu'il peut ne pas être simple d'imposer à de telles fréquences.

3 Appliquons le TEM au proton entre la sortie d'un dee et l'entrée de l'autre. On suppose que lors de ce passage la tension est maximum et constante : $a \ll \pi R$ donc le temps de vol dans l'espace entre les dees est négligeable devant la durée passée dans un dee. Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + eV_2 = \frac{1}{2}mv_n^2 + eV_1 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + \frac{1}{2}mv_n^2 = eU_m.$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \approx \frac{1}{2}mv_n^2 = neU_m \quad \text{soit} \quad v_n = \sqrt{\frac{2neU_m}{m}}$$

soit

$$R_n = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2neU_m}{m}} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_n = \sqrt{\frac{2nmU_m}{B^2e}}}$$

4 L'énergie cinétique du proton en sortie du cyclotron s'écrit

$$E_{c,s} = \frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{R_s^2 e^2 B^2}{2m} \quad \text{d'où} \quad R_s = \frac{\sqrt{2mE_{c,s}}eB}{=} 43,5 \text{ cm}.$$

On en déduit également le nombre de passages par la zone accélératrice,

$$E_{c,s} = NeU_m \quad \text{soit} \quad N = \frac{E_{c,s}}{eU_m} = 400,$$

et comme un tour compte deux passages dans la zone séparant les dees, on en déduit que **le proton a parcouru 200 tours** dans le cyclotron avant d'en sortir.

En pratique, l'approximation de tension constante et maximale lors de la traversée de la zone séparant les dees est très optimiste, et le nombre de tours nécessaires pour atteindre l'énergie voulue est en réalité supérieur à notre estimation, mais reste de l'ordre de quelques centaines.