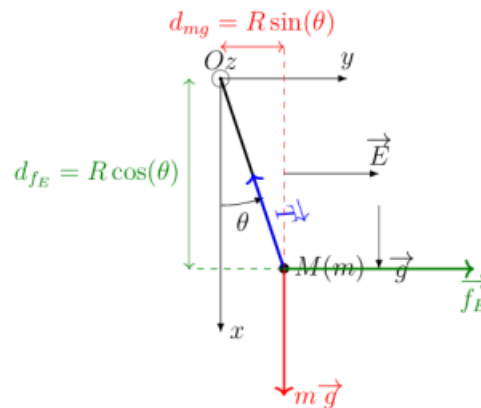


Moment cinétique

□ **Exercice 22.1. Équilibre d'un pendule électrostatique ★ (force de Lorentz électrique, équilibre)**

- Système : boule de polystyrène M de masse m et de charge Q .
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g}$;
- tension du fil \vec{T} ;
- force électrique $\vec{f}_E = Q\vec{E}$.



Le moment de la tension du fil par rapport à (Oz) est nul car la droite d'action coupe l'axe (Oz) .

En utilisant le bras de levier : $\mathcal{M}_{Oz}(m\vec{g}) = -mgR \sin(\theta)$ et $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{f}_E) = +qER \cos(\theta)$

- À l'équilibre, en θ_e , la somme des moments des forces est nulle.

- Alors $-mg \sin(\theta_e) + QE \cos(\theta_e) = 0$, soit $\tan(\theta_e) = \frac{QE}{mg}$

On vérifie que si m augmente, θ_e diminue, et si E ou Q augmente, θ_e .

□ **Exercice 22.2. Pendule simple relié à des ressorts ★★ (force de rappel élastique, TMC)**

- Par définition : $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m\overline{OM} \wedge \overline{v}(M)_{\mathcal{R}} = m\ell \overline{e}_r \wedge \ell \dot{\theta} \overline{e}_\theta$ soit $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m\ell^2 \dot{\theta} \overline{e}_z$.

- Forces appliquées à M : poids $\overline{P} = m\vec{g} = +mg \overline{e}_x$; tensions des deux ressorts $\overline{T}_1 = -k(\ell_0 - \ell \sin \theta - \ell_0)(-\overline{e}_y) = -k\ell \sin \theta \overline{e}_y$ et $\overline{T}_2 = -k(\ell_0 + \ell \sin \theta - \ell_0)\overline{e}_y = -k\ell \sin \theta \overline{e}_y$; tension du fil $\overline{T} = -T \overline{e}_r$.

☛ Les tensions \overline{T}_1 et \overline{T}_2 sont bien égales et non opposées ! Par exemple lorsque (1) est comprimé et (2) étiré, leurs deux tensions sont orientées vers la gauche.

Les moments par rapport à O sont donc : $\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{P}) = \overline{OM} \wedge \overline{P} = \ell \overline{e}_r \wedge mg \overline{e}_x$ soit

$$\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{P}) = -mg\ell \sin \theta \overline{e}_z ; \quad \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_1) = \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_2) = \overline{OM} \wedge \overline{T}_1 = \ell \overline{e}_r \wedge (-k\ell \sin \theta \overline{e}_y) \quad \text{soit}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_1) = \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_2) = -k \ell^2 \sin \theta \cos \theta \overline{e}_z ; \quad \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}) = \overline{OM} \wedge \overline{T} = \vec{0} \quad (\text{vecteurs colinéaires}).$$

⇒ Méthode 16.1

- Théorème du moment cinétique appliqué à M , par rapport à O dans \mathcal{R} (supposé galiléen) :

$$\frac{d\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}) + \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{P}) + \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_1) + \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_2). \text{ Projection sur } \overline{e}_z :$$

$m\ell^2 \ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta - 2k\ell^2 \sin \theta \cos \theta$. Pour $\theta \ll 1$: $\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1$ donc l'équation devient

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m} \right) \theta = 0. \text{ La pulsation est donc } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}.$$

□ Exercice 22.3. Pendule conique ★★ (TMC, mouvement horizontal)

Système : point matériel $M(m)$

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g}$
- tension du fil \vec{T}

La tension du fil est une force inconnue, il est donc préférable d'appliquer le TMC par rapport à un point qui permet de ne pas la faire intervenir : c'est le cas par rapport au point A , car \vec{T} est colinéaire à \overrightarrow{AM} , donc $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{0}$.

LMC par rapport à A : $\frac{d\overrightarrow{L}_A}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(m\vec{g}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{T})$

Le mouvement de M est circulaire, car ℓ et α sont constants

$$\overrightarrow{L}_A(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M) = (-z_A\vec{u}_z + r\vec{u}_r) \wedge mr\dot{\theta}\vec{u}_\theta = mr\dot{\theta}z_A\vec{u}_r + mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

La vitesse angulaire ω , le rayon r et l'altitude de A sont constantes, donc

$$\frac{d\overrightarrow{L}_A}{dt} = mr\omega z_A\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(m\vec{g}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{g} = mgl \sin(\alpha)\vec{u}_\theta$$

Le TMC donne donc : $mrz_A\omega^2 = mgl \sin(\alpha)$

De plus, $\cos(\alpha) = \frac{z_A}{\ell}$ et $\sin(\alpha) = \frac{r}{\ell}$

Ainsi : $\ell^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)\omega^2 = gl \sin(\alpha)$, soit $\cos(\alpha) = \frac{\ell\omega^2}{g}$

Ce n'est possible que si $\omega > \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Mouvement dans un champ de force centrale

□ Exercice 22.4. Modèle classique de trou noir ★ (énergie potentielle effective, vitesse cosmique)

1 La force de gravitation et l'énergie potentielle dont elle dérive s'écrivent

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad E_p = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}$$

2 Voir cours : c'est une conséquence de la conservation du moment cinétique.

3 Voir cours : on remplace $\dot{\theta}$ par C/r^2 dans l'expression de l'énergie mécanique, ce qui permet d'identifier l'énergie potentielle effective

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G} m_0 m}{r}$$

Attention : c'est une « fausse » énergie potentielle, qui contient un terme issu de l'énergie cinétique. On peut s'en rendre compte en notant la présence de la constante des aires C , qui dépend des conditions initiales.

4 Voir cours et figure 1. Le point M peut échapper à l'attraction de l'astre si sa trajectoire est non-bornée pour $r \rightarrow \infty$, c'est-à-dire pour $E_m \geq 0$.

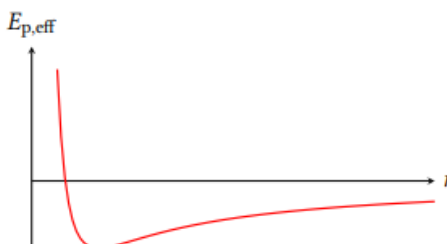


Figure 1 – Profil d'énergie potentielle effective au voisinage d'un astre sphérique.

5 Voir cours. On exprime la valeur de l'énergie mécanique à la limite d'un état de diffusion ($E_m = 0$) à la surface de l'astre (distance R , vitesse v_{lib}). On peut le retrouver plus qualitativement en exprimant la conservation de l'énergie mécanique entre la surface de l'astre et une distance infinie en indiquant qu'à la limite la particule s'est infiniment éloignée de l'astre ($r \rightarrow \infty$) mais n'a plus qu'une vitesse nulle ($v = 0$). Ainsi,

$$\frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 - \frac{\mathcal{G} m_0 m}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2 \mathcal{G} m_0}{R}}$$

6 Par définition du rayon de Schwarzschild, si l'astre a pour rayon R_S alors sa vitesse de libération est égale à c . On en conclut que l'astre est un trou noir si

$$R < R_S = \frac{2 \mathcal{G} m_0}{c^2}$$

7 Numériquement,

$$R_{S,S} = 3,0 \text{ km} \quad \text{et} \quad R_{S,T} = 9,0 \text{ mm}$$

ce qui donne en termes de densité

$$\rho_S = 7,7 \cdot 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \text{et} \quad \rho_T = 8,5 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

C'est phénoménal : imaginez toute la masse de la Terre concentrée dans une balle de babyfoot ou de ping-pong !

8 Une première contradiction consiste à généraliser des résultats de mécanique classique à des vitesses égales à la vitesse de la lumière, qui se rapportent donc au **domaine de la relativité**. La seconde contradiction est la généralisation de résultats de gravitation, qui s'appliquent donc aux particules massives, à la lumière, alors qu'on sait que **les photons sont sans masse**.

□ Exercice 22.5. Comète de Halley ★ (trajectoire elliptique, loi de Kepler)

1 Voir figure 2.

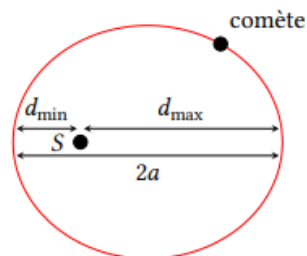


Figure 2 – Schéma de la trajectoire de la comète de Halley. Le Soleil S est un des foyers de l'ellipse. On représente en outre les distances minimale d_{min} et maximale d_{max} de la comète au Soleil, ainsi que le grand axe $2a$ de l'ellipse.

2 La troisième loi de Kepler permet de déterminer le demi-grand axe a , puisque

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_S \mathcal{G}} \quad \text{d'où} \quad a = \left(\frac{T^2 m_S \mathcal{G}}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

Or d'après la figure

$$d_{\text{max}} + d_{\text{min}} = 2a$$

d'où on déduit

$$d_{\text{max}} = 2 \left(\frac{T^2 m_S \mathcal{G}}{4\pi^2} \right)^{1/3} - d_{\text{min}} = 5,3 \cdot 10^{12} \text{ m} = 1,1 \cdot 10^2 \text{ u.a.}$$

3 D'après le schéma,

$$d_{\text{max}} = r(0) = \frac{p}{1-e} \quad \text{et} \quad d_{\text{min}} = r(\pi) = \frac{p}{1+e}$$

d'où on déduit

$$\frac{d_{\min}}{d_{\max}} = \frac{1-e}{1+e} \quad \text{soit} \quad e = \frac{1 - \frac{d_{\min}}{d_{\max}}}{1 + \frac{d_{\min}}{d_{\max}}} \quad \text{donc} \quad \boxed{e = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{d_{\max} + d_{\min}} = 0,97}$$

et de même

$$\boxed{p = d_{\min}(1+e) = 1,1 \text{ u.a.}}$$

□ **Exercice 22.6. Approche d'un astéroïde ★★ (état de diffusion, loi de conservation)**

- **Système** : astéroïde ;
- **Référentiel** : géocentrique, considéré galiléen ;
- **Repérage** : polaire de centre O ;
- **Bilan des forces** : l'astéroïde n'est soumis qu'à la force gravitationnelle exercée par la Terre de masse m_T ,

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mm_T}{r^2} \vec{e}_r \quad \rightsquigarrow \quad E_p = -\mathcal{G} \frac{mm_T}{r}.$$

1 L'énergie mécanique de l'astéroïde est une constante du mouvement. En l'exprimant à sa position initiale (distance infinie, vitesse v_0) et au point P (distance r_P , vitesse v_P) on obtient la relation voulue :

$$E_m = \underset{\uparrow \text{CI}}{\frac{1}{2}mv_0^2} + 0 = \underset{\uparrow \text{périgée}}{\frac{1}{2}mv_P^2} - \mathcal{G} \frac{m_T m}{r_P}$$

2 Le moment cinétique de l'astéroïde est également une constante du mouvement. Notons H le projeté orthogonal de O sur la droite Δ dirigée par le vecteur \vec{v}_0 .

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{OM} \wedge m\vec{v} \\ &= m(\vec{OH} + \vec{HM}_{\infty}) \wedge \vec{v}_0 = -bv_0 \vec{e}_z \\ &\underset{\uparrow \text{CI}}{=} m\vec{OP} \wedge \vec{v}_P = -r_P v_P \vec{e}_z \\ &\underset{\uparrow \text{périgée}}{=} \end{aligned}$$

La deuxième relation cherchée s'écrit donc

$$\boxed{r_P v_P = bv_0.}$$

3 Remplaçons $v_P = bv_0/r_P$ dans l'expression de l'énergie,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m \frac{b^2 v_0^2}{r_P^2} - \mathcal{G} \frac{m_T m}{r_P} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 r_P^2 + \mathcal{G} m_T r_P - \frac{1}{2}b^2 v_0^2 = 0$$

Cette équation se résout en

$$r_{\pm} = \frac{-m_T \mathcal{G} \pm \sqrt{\mathcal{G}^2 m_T^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2}$$

mais seule la solution positive est pertinente physiquement, soit

$$r_P = \frac{-m_T \mathcal{G} + \sqrt{\mathcal{G}^2 m_T^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2}$$

4 Numériquement, $r_P = 72 \cdot 10^3 \text{ km} > R_T + R_{\text{atm}}$ donc pas d'étoile filante.

Satellites

□ Exercice 22.7. Frottements sur un satellite en orbite basse ★★★ (Orbite circulaire)

Travaillons en coordonnées cylindriques dont l'origine O se trouve au centre de la Terre et d'axe (Oz) normal au plan de la trajectoire.

1 La force de gravitation subie par le satellite vaut

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

donc son moment par rapport au centre O est

$$\vec{M}_O = \vec{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

car $\vec{OS} = r \vec{e}_r$ et \vec{F} sont colinéaires. D'après le théorème du moment cinétique appliqué au satellite S dans le référentiel géocentrique supposé galiléen,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{L}_O = \text{cte.}$$

Exprimons \vec{L}_O dans la base cylindrique :

$$\vec{L}_O = \vec{OS} \wedge m \vec{v} = r \vec{e}_r \wedge r \omega \vec{e}_\theta = r^2 \omega \vec{e}_z.$$

La conservation du moment cinétique permet donc de conclure que

$$C = r^2 \omega = \text{cte.}$$

La vitesse en orbite circulaire s'écrit

$$v = r \omega = \frac{C}{r} = \text{cte}$$

car $r = \text{cte}$. Le mouvement est donc effectivement **uniforme**.

2 Appliquons le théorème de la résultante cinétique au satellite, en orbite circulaire uniforme autour de la Terre :

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad \text{soit} \quad -m \frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r.$$

On en déduit directement

$$v = \sqrt{\frac{MG}{r}}.$$

Pour l'orbite d'altitude $h = 1 \cdot 10^3$ km, on a

$$v = \sqrt{\frac{MG}{R+h}} = 7,4 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 27 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

3 L'énergie potentielle du satellite est purement gravitationnelle et vaut

$$E_p = -G \frac{mM}{r}.$$

L'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{soit} \quad E_c = \frac{mMG}{2r}.$$

L'énergie mécanique vaut donc

$$E_m = E_c + E_p = \frac{mMG}{2r} - G \frac{mM}{r} \quad \text{soit} \quad E_m = -\frac{mMG}{2r}.$$

4 La puissance de la force de frottements \vec{f} est

$$\mathcal{P}_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\lambda m v^3 = -\lambda m \left(\frac{MG}{r} \right)^{3/2}.$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique, on a donc

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_f \quad \text{soit} \quad -\frac{mMG}{2} \times \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\lambda m \left(\frac{MG}{r} \right) \sqrt{\frac{MG}{r}},$$

ce qui se simplifie en

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = -2\lambda \sqrt{MG} \sqrt{r}.}$$

5 On constate sur l'équation différentielle précédente que dr/dt est toujours négatif. Le rayon de l'orbite diminue donc sous l'effet des frottements. En revanche, d'après la question 2, si le rayon de l'orbite diminue alors la vitesse du satellite augmente. Ainsi, **les frottements ont pour effet d'augmenter la vitesse du satellite**, ce qui est innattendu.

6 En séparant les variables et en intégrant, on obtient

$$\int_{R+h}^r \frac{dr}{2\sqrt{r}} = -\lambda \sqrt{MG} \int_0^t dt \quad \text{d'où} \quad \sqrt{r(t)} - \sqrt{R+h} = -\lambda t \sqrt{MG}$$

soit finalement

$$\boxed{r(t) = \left(\sqrt{R+h} - \lambda t \sqrt{MG} \right)^2 .}$$

L'altitude du satellite diminue de $\Delta h = 2 \text{ m}$ pendant la durée $\Delta t = 1 \text{ jour} = 8,6 \cdot 10^4 \text{ s}$. Ainsi,

$$\sqrt{R+h-\Delta h} - \sqrt{R+h} = -\lambda \Delta t \sqrt{MG}$$

Comme $\Delta h \ll R+h$, un développement limité est justifié et donne

$$\begin{aligned} \sqrt{R+h} \left(1 - \frac{\Delta h}{R+h} \right)^{1/2} - \sqrt{R+h} &= -\lambda \Delta t \sqrt{MG} \\ \sqrt{R+h} \left(1 - \frac{\Delta h}{2(R+h)} \right) - \sqrt{R+h} &= -\lambda \Delta t \sqrt{MG} \\ \frac{\Delta h}{2\sqrt{R+h}} &= \lambda \Delta t \sqrt{MG} \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\lambda = \frac{\Delta h}{2 \Delta t \sqrt{MG(R+h)}} = 2,1 \cdot 10^{-16} \text{ m}^{-1} .}$$

□ Exercice 22.8. Incident de satellisation ★★ (Orbite circulaire et elliptique)

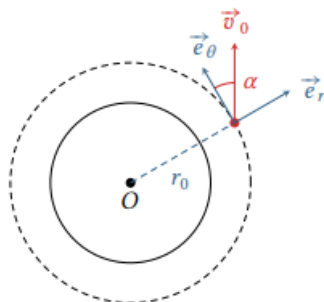


Figure 3 – Conditions initiales communiquées au satellite.

mais compte tenu de l'incident sa vitesse initiale s'écrit

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{M_T \mathcal{G}}{r_0}} (\sin \alpha \vec{e}_r + \cos \alpha \vec{e}_\theta)$$

2] L'énergie mécanique du satellite n'est pas modifiée par l'incident par rapport à ce qui était prévu, elle reste donc négative. Le satellite est toujours dans un état lié, mais sa trajectoire n'est pas circulaire, elle est elliptique. L'énergie mécanique pour une trajectoire elliptique est reliée au demi-grand axe a de la trajectoire par

$$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ellipse}}}{=} -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2a}.$$

Si l'orbite avait été circulaire, l'énergie mécanique se serait écrite

$$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{circulaire}}}{=} -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r_0}.$$

On en déduit donc

$$\boxed{a = r_0.}$$

3] L'apogée et le périégée correspondent aux points extrêmes de la trajectoire, pour lesquels $\dot{r} = 0$. L'énergie mécanique sur la trajectoire elliptique s'écrit alors

$$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{extrême}}}{=} \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \mathcal{G}\frac{M_T m}{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r_0}.$$

La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est reliée au rayon instantané r par la constante des aires. La conservation du moment cinétique entre la position initiale et une position quelconque sur la trajectoire s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} m(r_0\vec{e}_r) \wedge v_0(\sin\alpha\vec{e}_r + \cos\alpha\vec{e}_\theta) = mr_0v_0\cos\alpha\vec{e}_z \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{qcq}}}{=} m(r\vec{e}_r) \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$C = r^2\dot{\theta} = r_0v_0\cos\alpha \quad \text{soit} \quad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{r_0v_0\cos\alpha}{r^2}.$$

Par conséquent, l'équation à résoudre devient

$$\frac{1}{2}m\frac{r_0^2v_0^2\cos^2\alpha}{r^2} - \mathcal{G}\frac{M_T m}{r} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r_0}.$$

De nombreuses simplifications sont possibles grâce à l'expression de v_0

$$\frac{\mathcal{G}M_T m r_0 \cos^2\alpha}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_T m}{r} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r_0} \quad \text{soit} \quad \frac{r_0 \cos^2\alpha}{2r^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2r_0} = 0$$

En multipliant par $2r_0r^2$, on aboutit à une équation polynômiale du second degré

$$r^2 - 2rr_0 + r_0^2 \cos^2\alpha = 0$$

dont les racines sont

$$r_{\pm} = \frac{2r_0 \pm \sqrt{4r_0^2 - 4r_0^2 \cos^2\alpha}}{2} = r_0(1 \pm \sqrt{1 - \cos^2\alpha}) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\begin{cases} r_A = r_0(1 + \sin\alpha) \\ r_P = r_0(1 - \sin\alpha) \end{cases}}$$

4] Le satellite s'écrase si sa trajectoire théorique pénètre à l'intérieur de la Terre (et en toute rigueur de l'atmosphère, dont on négligera l'épaisseur ici), c'est-à-dire si

$$r_0(1 - \sin\alpha) < R_T \quad \text{soit} \quad \boxed{\sin\alpha > 1 - \frac{R_T}{r_0}}.$$

□ Exercice 22.9. Satellite circulaire ★★ (Orbite circulaire, énergétique)

1. PFD pour le satellite, soumis uniquement à la force de gravitation de la Terre, dans le référentiel géocentrique : $m\vec{a} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$. Projection sur \vec{e}_r : $-mr\dot{\theta}^2 = -G\frac{Mm}{r^2}$ d'où

$$\dot{\theta}^2 = G\frac{M}{r^3}. \text{ Or } \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ donc } v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}.$$

⇨ Méthode 16.6

2. $T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ donc $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$. Ce rapport est indépendant des caractéristiques du satellite, il est donc le même pour tous les satellites de la Terre.

Cette loi est l'équivalent de la troisième loi de Kepler dans le système solaire : le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ a la même valeur pour toutes les planètes.

3. $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$ et $E_p = -\frac{GMm}{r}$ donc $E_m = -\frac{GMm}{2r} = -E_c$. L'énergie mécanique est négative, ce qui correspond à un état lié si on fait l'étude avec l'énergie potentielle effective.

4. $T = T_T$ (il fait un tour sur son orbite en même temps que la Terre sur elle-même) d'où $h = \left(\frac{GMT_T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$. AN $h = 35800 \text{ km}$. On trouve $h \approx 6R$: les satellites géostationnaires sont très éloignés, par rapport à d'autres satellites (observation, communication...).

5. a) Le satellite est à la distance R du centre de la Terre, et tourne avec elle à la vitesse angulaire ω_T et selon un cercle de rayon $R \cos \lambda$. Alors $E_{m0} = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mR^2 \cos^2 \lambda \omega_T^2$.

b) TÉM entre le point de départ sur la Terre et un point de l'orbite circulaire : $\Delta E_m = W$ soit $W = -\frac{GMm}{2(R+h)} - \left(-\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mR^2 \cos^2 \lambda \omega_T^2\right) \Leftrightarrow W = \frac{GMm(R+2h)}{2R(R+h)} - \frac{1}{2}mR^2 \cos^2 \lambda \omega_T^2$.

Pour minimiser W on doit donc maximiser $\cos^2 \lambda$, donc se rapprocher de l'équateur ($\lambda = 0$).

c) Pour $h \ll R$: $W \approx \frac{GMm}{2R} - \frac{1}{2}mR^2 \cos^2 \lambda \omega_T^2$. On calcule $\frac{W_1}{W_2}$ avec $\omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$ (où

$T_T = 1 \text{ jour sidéral} = 86164 \text{ s}$) ; la donnée de m n'est pas nécessaire. AN $\frac{W_1}{W_2} = 0,9977$ soit une

économie de $0,23\%$ seulement en lançant depuis l'équateur : contrairement à une croyance répandue, l'économie d'énergie due à « l'effet de fronde » donné par la Terre n'est pas la raison pour laquelle les bases spatiales sont situées près de l'équateur (Kourou, Cap Canaveral...). L'intérêt réel est une plus grande facilité pour placer des satellites en orbite équatoriale.

□ Exercice 22.10. Changement d'orbite ★★ (Orbite circulaire et elliptique, énergie mécanique)

1. On obtient avec le PFD : $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$. AN $v_1 = 7300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

⇒ Méthode 16.6

2. TMC par rapport au point O fixe dans le référentiel géocentrique \mathcal{R} supposé galiléen : $\frac{d\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car \vec{F} (force gravitationnelle) est colinéaire à \vec{OM} , donc $\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = \vec{cte}$: le moment cinétique de M en O se conserve. Or sur cette trajectoire plane : $\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \vec{cte}$ donc $r^2 \dot{\theta} = C = \text{cte}$.

⇒ Méthode 16.4

3. Conservation de l'énergie mécanique : $E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = \text{cte}$ soit en utilisant la constante des aires C :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} = \text{cte}. \text{ On a donc trouvé } E_{\text{peff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}.$$

4. Lorsque la distance r est extrémale (r_{\min} ou r_{\max}), sa dérivée \dot{r} est nulle, donc r_{\min} et r_{\max} sont les solutions de l'équation : $\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} = E_m \Leftrightarrow 2E_m r^2 + 2GMmr - mC^2 = 0$. La somme des racines est $r_{\min} + r_{\max} = -\frac{GMm}{E_m}$. Cela équivaut à $2a = -\frac{GMm}{E_m}$, soit $E_m = -\frac{GMm}{2a}$.

Pour un cercle, a est égal au rayon, donc $E_{m1} = -\frac{GMm}{2r_1}$ sur le premier cercle et $E_{m2} = -\frac{GMm}{2r_2}$

sur le second. Sur l'ellipse de transfert : $r_1 + r_2 = r_{\min} + r_{\max} = 2a$ donc $E_{me} = -\frac{GMm}{r_1 + r_2}$.

5. Le changement d'orbite a lieu en un point donné, donc à énergie potentielle constante. Alors la variation d'énergie mécanique est une variation d'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m (v_{e1}^2 - v_1^2) = E_{me} - E_{m1} = -\frac{GMm}{r_1 + r_2} + \frac{GMm}{2r_1} = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)} \text{ donc } v_{e1} = \sqrt{\frac{GM(r_2 - r_1)}{r_1(r_1 + r_2)}} + v_1^2 \text{ soit}$$

$$v_{e1} = \sqrt{\frac{2GM r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}. \text{ AN } v_{e1} = 9520 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ donc } \Delta v_P = 2220 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{Travail fourni par le moteur : } W_P = E_{me} - E_{m1} = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)}. \text{ AN } W_P = 1,7 \cdot 10^{10} \text{ J} = 17 \text{ GJ}.$$

●* On peut aussi calculer la valeur numérique de W_P avec la formule

$$\frac{1}{2} m (v_{e1}^2 - v_1^2), \text{ mais ce n'est pas égal à } \frac{1}{2} m (\Delta v_P)^2 !$$

6. En P et en A , les vecteurs vitesse et position sont orthogonaux : la conservation du moment cinétique donne $m r_1 v_{e1} \vec{e}_z = m r_2 v_{e2} \vec{e}_z$ d'où $v_{e2} = v_{e1} \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{2GM r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}. \text{ AN } v_{e2} = 1690 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

7. $v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}$ donc $\Delta v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} - \sqrt{\frac{2GM r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$. AN $\Delta v_A = 1390 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (donc la vitesse sur l'orbite géostationnaire sera $v_2 = 3080 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Travail fourni par le moteur : $W_A = E_{m2} - E_{me} = -\frac{GMm}{2r_2} + \frac{GMm}{r_1 + r_2}$ soit $W_A = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_2(r_1 + r_2)}$.

AN $W_A = 3,0 \cdot 10^9 \text{ J} = 3,0 \text{ GJ}$.