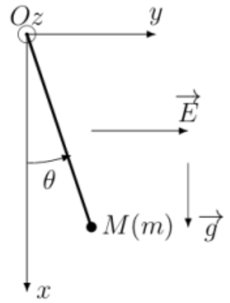
Moment cinétique

□ Exercice 22.1. Équilibre d'un pendule électrostatique ★ (force de Lorentz électrique, équilibre)

Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil de masse négligeable. La boule est préalablement chargée avec une charge électrique $Q = 2,3 \cdot 10^{-4}$C. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\overrightarrow{u_y}$ avec $E = 500$ V $\cdot$ m^{-1}. La longueur du pendule est $OM = R = 10$ cm et la masse de la boule assimilée à un point M est $m = 20$ g.

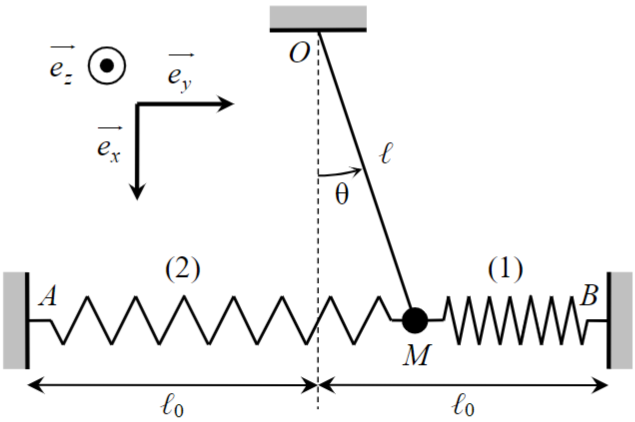


L'accélération de la pesanteur est $g = 9,8$ m $\cdot$ s^{-2}.

1. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le pendule et les représenter sur le schéma. Exprimer le moment de ces forces par rapport à l'axe (Oz) en utilisant le bras de levier.
2. Que peut-on dire de la somme des moments à l'équilibre ?
3. Déterminer la position d'équilibre θ_e du pendule.

□ Exercice 22.2. Pendule simple relié à des ressorts ★★ (force de rappel élastique, TMC)

Un pendule simple est constitué d'un fil rigide de masse négligeable et de longueur ℓ, à l'extrémité duquel est fixé un point matériel M de masse m. Il est accroché au point O, fixe par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire. M est également attaché à deux ressorts (1) et (2) identiques, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, fixés entre deux points A et B distants de $2\,\ell_0$: lorsque le pendule est vertical, les ressorts sont au repos.



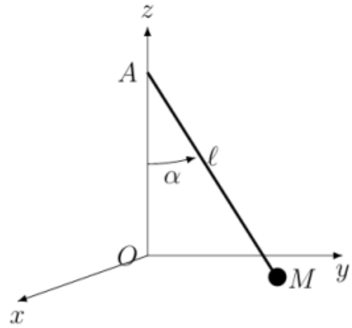
On déplace légèrement M par rapport à la verticale puis on le laisse évoluer librement. Il oscille alors en décrivant un petit arc de cercle de centre O, dans un plan vertical, et on repère sa position par l'angle θ avec la verticale. Cet angle restant toujours faible, on pourra considérer que les ressorts restent horizontaux.

1. Donner l'expression du moment cinétique de M par rapport à O dans $\mathcal{R}$, en utilisant une base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ d'origine O.
2. Calculer les moments des forces s'exerçant sur M, en fonction de la seule variable θ.
3. Par application du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ et en déduire la pulsation des petites oscillations.

□ Exercice 22.3. Pendule conique ★★ (TMC, mouvement horizontal)

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ attaché en un point A fixe d'un axe (Oz). Le point matériel M est astreint à tourner autour de (Oz), dans le plan (Oxy), à la vitesse angulaire constante ω dans le référentiel galiléen d'étude $(O; \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.

En appliquant le théorème du moment cinétique en un point astucieusement choisi, déterminer l'angle d'inclinaison constant α du pendule avec l'axe (Oz) en fonction de ℓ, g et ω.



Mouvement dans un champ de force centrale

□ Exercice 22.4. Modèle classique de trou noir ★ (énergie potentielle effective, vitesse cosmique)

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace [1] en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogue relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposé dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine (la liste est sur Wikipédia), mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle heuristique de physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un astre sphérique de masse m_0, de rayon R et de centre O. Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

1 - Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M. Celle-ci se conserve-t-elle ?

2 - Montrer que le mouvement de M est nécessairement plan. M étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

3 - Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_\mathrm{p,eff}(r)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $E_\mathrm{p,eff}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r.

4 - Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_\mathrm{p,eff}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point M peut échapper à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.

5 - En déduire la vitesse de libération v_lib à la surface de cet astre.

6 - Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Calculer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.

7 - Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_\mathrm{S} = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg) et pour la Terre ($M_\mathrm{T} = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg). En déduire la densité minimale d'un trou de noir de cette masse.

8 - Quelles sont les deux contradictions internes à cette approche ?

Notons toutefois que malgré les deux limites évoquées, le rayon de Schwarzschild donne le bon ordre de grandeur de la taille d'un trou noir de masse m.

□ Exercice 22.5. Comète de Halley ★ (trajectoire elliptique, loi de Kepler)

La comète de Halley est la plus connue. La première mention de son observation date de 611 av. J.-C. en Chine, et on la retrouve tout au long de l'Antiquité et du Moyen-Âge ... évidemment sans savoir qu'il s'agit d'une seule comète. Cette découverte a été formalisée en 1705 par Edmond Halley, qui publia un livre avançant que les observations en 1531, 1607 et 1682 concernaient en fait la même comète. Son prochain passage est prévu en 2061.

On sait aujourd'hui que la comète de Halley suit une trajectoire elliptique de période de révolution autour du Soleil 76 ans, sa distance minimale au Soleil étant de $d_\mathrm{min} = 0{,}59$ unités astronomiques.

Données :

- une unité astronomique correspond à la distance moyenne Terre-Soleil, soit $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m ;
- Masse solaire $m_\mathrm{S} = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg.

1 - Faire un schéma de la trajectoire indiquant la position du Soleil et d_min.

2 - Déduire de la troisième loi de Kepler la plus grande distance au Soleil de la comète.

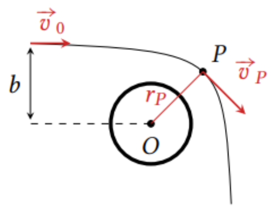
3 - Une conique est décrite par une équation polaire de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

où l'origine du repérage polaire est prise sur un des foyers de la conique. Déterminer le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire de la comète de Halley.

□ Exercice 22.6. Approche d'un astéroïde ★★ (état de diffusion, loi de conservation)

De nombreux objets dits géocroiseurs passent régulièrement à proximité de la Terre. Lorsqu'ils sont trop proches, ils s'échauffent par frottement dans les hautes couches de l'atmosphère et se désintègrent en donnant naissance à des étoiles filantes.



On considère ici un astéroïde de masse m, initialement très éloigné de la Terre et de tout autre astre, si bien qu'il est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_0$. Le prolongement de cette trajectoire rectiligne passe à une distance b du centre O de la Terre, appelée *paramètre d'impact*. Lorsqu'il se rapproche de la Terre, l'attraction gravitationnelle dévie l'astéroïde et sa trajectoire devient hyperbolique. On appelle périgée le point P de cette trajectoire la plus proche du centre de la Terre à distance r_P. L'astéroïde a alors une vitesse v_P. La figure ci-contre n'est pas à l'échelle.

1 - En raisonnant sur l'énergie mécanique, établir une relation entre r_P, v_P et v_0.

2 - En raisonnant sur le moment cinétique, établir une seconde relation entre ces grandeurs.

3 - En déduire la distance minimale d'approche r_P en fonction de b et v_0.

4 - On considère un astéroïde se déplaçant à $v_0 = 2\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ et ayant un paramètre d'impact $b = 1\cdot 10^5\,\text{km}$. Va-t-il donner une étoile filante ?

Satellites

□ Exercice 22.7. Frottements sur un satellite en orbite basse ★★★ (Orbite circulaire)

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel S en orbite autour de la Terre dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. On note M la masse de la Terre, $m \ll M$ la masse du satellite et G la constante de gravitation universelle.

Données : $M = 6{,}0\cdot 10^{24}\,\text{kg}$; rayon terrestre $R = 6{,}4\cdot 10^3\,\text{km}$; $G = 6{,}7\cdot 10^{-11}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$.

Dans un premier temps, on néglige les autres interactions que la force de gravitation entre la Terre et le satellite, et on suppose l'orbite circulaire de rayon r parcourue à la vitesse angulaire ω.

1 - Montrer par le théorème du moment cinétique que la quantité $C = r^2\omega$ est une constante du mouvement. En déduire que le mouvement est uniforme.

2 - Établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de G, M et r. La calculer numériquement pour une orbite d'altitude 1000 km.

3 - Exprimer successivement l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite.

Les satellites en orbite basse subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère. Ces frottements limitent la durée du vie des satellites en les faisant lentement chuter sur Terre. Ainsi, un satellite situé sur une orbite à 1000 km d'altitude descend d'environ 2 m par jour. On modélise l'action des hautes couches de l'atmosphère par une force de frottement quadratique proportionnelle à la masse du satellite,

$$\vec{f} = -\lambda m v \vec{v}\,.$$

Cette force est suffisamment faible pour que la trajectoire demeure quasi-circulaire : les expressions obtenues pour une orbite circulaire demeurent valables, mais le rayon r de l'orbite varie lentement au cours du temps.

4 - À l'aide d'un théorème énergétique, établir l'équation différentielle vérifiée par r.

5 - Sans résoudre cette équation, montrer que les frottements font bien descendre le satellite. En déduire un résultat surprenant concernant l'effet des frottements sur la vitesse du satellite.

6 - Déterminer l'évolution de r en fonction du temps. En déduire l'expression et la valeur numérique du coefficient de frottement λ.

□ Exercice 22.8. Incident de satellisation ★★ (Orbite circulaire et elliptique)

Un satellite de masse m est destiné à être placé en orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Terre. Pour cela, il est amené à la distance r_0 du centre de la Terre, mais un incident se produit au moment du largage : la vitesse $\vec{v}_0$ qui lui est communiquée a bien la valeur prévue mais est inclinée d'un angle α par rapport à la direction souhaitée.

1 - Déterminer toutes les caractéristiques du vecteur $\vec{v}_0$ dans la base polaire.

2 - Justifier que la trajectoire du satellite est elliptique et déterminer le demi grand-axe de la trajectoire.

3 - Déterminer les distances r_A et r_P par rapport au centre de la Terre à l'apogée et au périgée.

4 - À quelle condition sur α le satellite s'écrase-t-il sur Terre ?

□ Exercice 22.9. Satellite circulaire ★★ (Orbite circulaire, énergétique)

Dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen), un satellite artificiel de masse m se déplace suivant une orbite circulaire de rayon $r = R + h$ autour du centre de la Terre (h étant son altitude par rapport à la surface terrestre). Ce mouvement peut s'étudier simplement à l'aide du PFD.

1. Montrer que la vitesse v est constante, et donner sa valeur en fonction de G, M, R et h.

2. En déduire la période T du mouvement, et montrer que la constante $\dfrac{T^2}{r^3}$ a la même valeur pour tous les satellites. Quelle est la loi équivalente pour le système solaire ?

3. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite ; quelle est la relation simple entre les deux ? Commenter le signe de l'énergie mécanique.

4. Un satellite est dit géostationnaire s'il est immobile par rapport au référentiel terrestre. Quelle est alors sa période ? En déduire son altitude h et commenter.

5. Pour que le satellite puisse tourner, il faut d'abord le lancer ! Le satellite étant initialement immobile par rapport à la Terre, sur une base de lancement située à la latitude λ, une fusée lui fournit le travail W pour l'amener sur son orbite avec la vitesse initiale calculée ci-dessus.

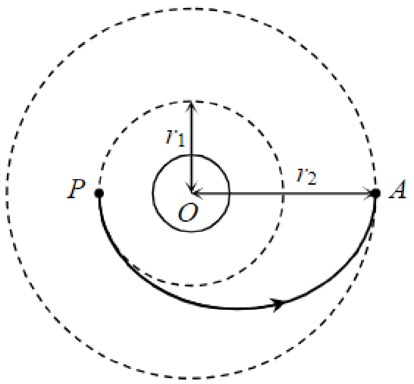
a) Quelle est l'énergie mécanique du satellite avant son lancement ? (On n'oubliera pas de tenir compte de la rotation de la Terre.)

b) Calculer le travail W que la fusée doit fournir au satellite. Où doit-on placer de préférence la base de lancement ?

c) Calculer, en pourcentage, l'économie réalisée entre un lancement depuis l'équateur ($\lambda_1 = 0$) et un lancement depuis le Nord de l'Europe ($\lambda_2 = 55°$), pour $h \ll R$. Commenter.

□ Exercice 22.10. Changement d'orbite ★★ (Orbite circulaire et elliptique, énergie mécanique)

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel M de masse $m = 900$ kg, se trouve sur une orbite circulaire provisoire de rayon $r_1 = 7500$ km autour de la Terre. On souhaite le faire passer sur son orbite définitive de rayon $r_2 = 42200$ km (orbite géostationnaire).



Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périgée P est à la distance r_1 et l'apogée A à la distance r_2 du centre de la Terre ; lorsque le satellite arrive à cet apogée, on le fait alors passer sur l'orbite circulaire de rayon r_2.

Ces deux changements d'orbite sont obtenus par allumage d'un moteur placé sur le satellite : ce processus est très bref (par rapport à la période orbitale), donc on considérera que la vitesse passe instantanément de v_1 à v_{e1} en P, puis de v_{e2} à v_2 en A (sans changer de direction dans chaque cas).

1. Calculer la vitesse v_1.

2. Démontrer que sur la trajectoire elliptique, le produit $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante (en notant r et θ les coordonnées polaires du satellite).

3. Montrer que l'énergie mécanique de M peut s'écrire sous la forme : $E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p\,eff}(r)$.

4. Déterminer l'équation dont sont solutions les deux valeurs extrêmes de r, et en déduire que pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe a, l'énergie mécanique du satellite s'écrit : $E_m = -\dfrac{GMm}{2a}$. Exprimer alors l'énergie mécanique du satellite sur chacune des trois orbites.

5. Calculer la vitesse v_{e1} après le premier transfert, et la variation $\Delta v_P = v_{e1} - v_1$. Calculer également le travail W_P fourni par le moteur au satellite en ce point.

6. Déterminer une relation entre v_{e1}, v_{e2}, r_1 et r_2. Calculer v_{e2}.

7. Calculer la variation de vitesse $\Delta v_A = v_2 - v_{e2}$ lors du second transfert, et le second travail W_A fourni par le moteur au satellite.