

Transformations du gaz parfait

□ Exercice 24.1. Transformations d'un gaz parfait ★ (GP, transformations iso-T, iso-P, iso-V)

La transformation β est isotherme donc $T_B = T_A$. Alors $P_B V_B = P_A V_A$ (gaz parfait), donc $V_B = V_A/3$.

⇒ Méthode 19.3

De plus, sur une isotherme réversible : $W_{AB} = nRT_A \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$ soit $W_\beta = W_{AB} = P_A V_A \ln 3$.

⇒ Méthode 19.1

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température donc sur l'isotherme AB, $\Delta U_\beta = \Delta U_{AB} = 0$. D'après le premier principe, on a alors $Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB}$ d'où $Q_\beta = Q_{AB} = -P_A V_A \ln 3$.

⇒ Méthode 19.2

AC est isochore donc $W_{AC} = 0$; CB est isobare donc $W_{CB} = -P_B(V_B - V_A)$ soit $W_{CB} = 2P_A V_A$. Finalement, $W_\alpha = W_{AC} + W_{CB} = 2P_A V_A$. L'énergie interne est une fonction d'état donc $\Delta U_\alpha = \Delta U_\beta = 0$. D'après le premier principe, on a alors $Q_\alpha = \Delta U_\alpha - W_\alpha$ d'où $Q_\alpha = -2P_A V_A$.

□ Exercice 24.2. Détente d'un gaz parfait ★★ (GP, transformation adiabatique)

1. L'état final est un état d'équilibre donc la paroi mobile ne bouge plus. On lui applique alors le théorème de la quantité de mouvement : $m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p\text{ext}} = \vec{0}$.

Projection sur la direction horizontale : $+P_1 S - \frac{P_0}{2} S = 0$ d'où $P_1 = \frac{P_0}{2}$.

2. Premier principe pour le gaz contenu dans le récipient, entre l'état initial et l'état final : $\Delta U = W + Q$. Toutes les parois sont calorifugées donc $Q = 0$.

Le gaz est parfait donc $\Delta U = C_V(T_1 - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0)$.

Et le travail des forces de pression extérieures est :

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} P_{\text{ext}} dV = -\frac{P_0}{2} \int_{V_0}^{V_1} dV = -\frac{P_0}{2}(V_1 - V_0), \text{ donc } \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = \frac{P_0}{2}(V_0 - V_1).$$

D'autre part il y a conservation de la matière : $n = \frac{P_0 V_0}{RT_0} = \frac{P_0 V_1}{2RT_1}$. Alors

$$\frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = \frac{nRT_0}{2} - nRT_1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\gamma - 1} + 1\right)T_1 = \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\right)T_0 \text{ d'où } T_1 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma}T_0 : T_1 < T_0$$

puisque $\gamma > 1$, donc le gaz s'est refroidi.

Enfin $V_1 = V_0 \frac{2T_1}{T_0}$ soit $V_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma}V_0$: $V_1 > V_0$ donc il s'agit bien d'une détente.

□ Exercice 24.3. Comparaison entre transformations ★★★ (GP, réversible et irréversible)

1 La transformation étant brusque, on peut raisonnablement penser que les échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire : **une modélisation adiabatique est la plus pertinente. On ne peut donc rien dire du tout a priori sur la température dans le système.**

2 Le système (thermodynamique) considéré est le gaz parfait contenu dans l'enceinte. Au cours de la transformation $I \rightarrow 1$, il reçoit un travail $W_{I \rightarrow 1}$ de la part du piston mais aucun transfert thermique car la transformation est adiabatique,

$$Q_{I \rightarrow 1} = 0.$$

La transformation qu'il subit est monobare : tout au long de cette transformation, la pression extérieure apparente est celle exercée par le piston sur le gaz qui est constante (la masse M est déposée en bloc). Ainsi,

$$P_{\text{app}} = P_0 + \frac{Mg}{S} \quad \text{d'où} \quad W_{I \rightarrow 1} = -P_{\text{app}} \Delta V \quad \text{soit} \quad W_{I \rightarrow 1} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) (V_1 - V_0).$$

Comme le gaz est parfait, son énergie interne varie de

$$\Delta U_{I \rightarrow 1} = C_V \Delta T \quad \text{soit} \quad \Delta U_{I \rightarrow 1} = \frac{5}{2} nR(T_1 - T_0).$$

D'après le premier principe appliqué au système pendant la transformation $I \rightarrow 1$,

$$\Delta U_{I \rightarrow 1} = W_{I \rightarrow 1} \quad \text{donc} \quad \frac{5}{2} nR(T_1 - T_0) = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) (V_1 - V_0)$$

3 Dans l'état 1, l'équilibre mécanique est atteint mais pas l'équilibre thermique. Le piston est soumis aux deux forces de pression et au poids de la masse M . En introduisant un axe z orienté vers le haut, son équilibre se traduit par

$$P_1 S \vec{e}_z - P_0 S \vec{e}_z - Mg \vec{e}_z = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

Pour déterminer la température T_1 , on peut remplacer les volumes par $V_i = nRT_i/P_i$ dans l'expression du premier principe. On trouve alors

$$\frac{5}{2} nR(T_1 - T_0) = -nRP_1 \left(\frac{T_1}{P_1} - \frac{T_0}{P_0}\right) \quad \text{d'où} \quad T_1 = \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2} + \frac{P_1}{P_0}\right) T_0$$

En reprenant l'expression de P_1 , il vient enfin

$$T_1 = \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2} + 1 + \frac{Mg}{SP_0}\right) T_0 \quad \text{soit} \quad T_1 = \left(1 + \frac{2Mg}{7SP_0}\right) T_0.$$

Le volume V_1 se déduit ensuite de la loi des gaz parfaits.

4 Les transferts thermiques entre le gaz contenu dans l'enceinte et l'extérieur au travers de la paroi de l'enceinte, sont responsables de cette transformation.

5 Dans l'état final, l'équilibre est complètement atteint. La condition d'équilibre thermique donne

$$T_2 = T_0.$$

Du point de vue de l'équilibre mécanique, rien n'a changé au cours de la transformation $1 \rightarrow 2$, donc

$$P_2 = P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}.$$

Enfin, le volume V_2 s'en déduit par la loi des gaz parfaits.

6 Le travail des forces de pression au cours de $1 \rightarrow 2$ se calcule comme précédemment,

$$W_{1 \rightarrow 2} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) (V_2 - V_1),$$

ainsi que la variation d'énergie interne qui se déduit d'une propriété de gaz parfait,

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1).$$

Le transfert thermique reçu s'obtient alors par

$$\begin{aligned} Q_{1 \rightarrow 2} &= \Delta U_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} \\ &= \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) + \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_1) \\ &= \frac{5}{2} nR(T_0 - T_1) + \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_1) \\ &= -W_{I \rightarrow 1} + \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_1) \\ &= \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_0) \end{aligned}$$

Finalement, le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque valent

$$W_{\text{tot}} = W_{I \rightarrow 1} + W_{1 \rightarrow 2} = - \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_0) \quad \text{et} \quad Q_{\text{tot}} = 0 + Q_{1 \rightarrow 2} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_0)$$

On remarque alors évidemment que $W_{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = 0$, ce qui s'explique par le fait que dans l'état initial I et dans l'état final 2 le gaz est en équilibre thermique avec l'extérieur à la température T_0 . Comme l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, il est logique de trouver

$$W_{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = \Delta U_{\text{tot}} = 0.$$

7 La transformation est **quasi-statique**. On peut supposer qu'elle laisse largement le temps aux échanges thermiques d'avoir lieu, si bien que l'équilibre thermique est atteint à tout instant. Par conséquent, on peut considérer la transformation **isotherme** : tout au long de la transformation, $T = T_0$.

8 Dans l'état final F , la masse placée sur le piston est exactement la même que dans le cas précédent. On en déduit

$$P_F = P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

et comme par ailleurs $T_F = T_0 = T_2$ la loi des gaz parfaits donne $V_F = V_2$. Ainsi, **l'état final F de la transformation quasi-statique et le même que l'état final 2 de la transformation brusque**. Cela n'a rien d'étonnant : l'équilibre mécanique et thermique est établi dans les deux états 2 et F , et les contraintes imposées au système de l'extérieur (masse M sur le piston, pression extérieure P_0 et température T_0) sont les mêmes. Lorsque l'équilibre est atteint, les mêmes contraintes extérieures conduisent au même état final, quel que soit les détails de la transformation amenant le système dans cet état.

9 Comme la transformation est quasi-statique, à tout instant la pression P dans le gaz est égale à la pression P_{ext} imposée par le piston. Ainsi, le travail des forces de pression vaut

$$W = \int_{IF} -P_{\text{ext}} dV = - \int_{IF} P dV \underset{\substack{\uparrow \\ \text{iso-T}}}{=} -nRT_0 \int_{V_0}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

ce qui donne finalement

$$W = -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_0}$$

Par ailleurs, comme le système est constitué d'un gaz parfait, la variation d'énergie interne au cours de la transformation est nulle : l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de T et la transformation est isotherme. Enfin, le transfert thermique reçu par le gaz au cours de la transformation $I \rightarrow F$ se déduit du premier principe,

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} W + Q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP+iso-T}}}{=} 0 \quad \text{donc} \quad Q = -W \quad \text{soit} \quad Q = nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_0}$$

On voit ainsi que les deux transformations ont les mêmes états initial et final, donc la même variation d'énergie interne, alors que les échanges d'énergie ne sont pas les mêmes.

Transformations des phases condensées□ **Exercice 24.4. Thermoplongeur de voyage ★ (Enthalpie de changement d'état)**

1. Le chauffage a lieu à l'air libre, donc la transformation est monobare. Le premier principe s'écrit alors $\Delta H = Q_P$. Or $Q_P = \mathcal{P}_{th} \Delta t$ (la puissance étant constante), et $\Delta H = mc\Delta T$ (phase condensée idéale), donc $mc\Delta T = \mathcal{P}_{th} \Delta t$. L'eau se met à bouillir dès que $T(\tau_1) = T_1 = 373 \text{ K}$

(soit $\theta_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$), d'où $\tau_1 = \frac{mc(T_1 - T_0)}{\mathcal{P}_{th}}$. AN $\tau_1 = 220 \text{ s} = 3 \text{ min } 40 \text{ s}$.

2. À partir de l'apparition de la première bulle de vapeur à $t = \tau_1$, l'eau se vaporise progressivement sur le palier de liquéfaction jusqu'à $t = \tau_2$. Pour calculer la variation d'enthalpie correspondante, on imagine une transformation réversible isotherme et isobare : on a alors toujours $\Delta H = Q_P = \mathcal{P}_{th} \Delta t$ mais avec cette fois $\Delta H = m\Delta_{vap}h$, soit

$$m\Delta_{vap}h = \mathcal{P}_{th} \Delta t = \mathcal{P}_{th} (\tau_2 - \tau_1), \text{ d'où } \tau_2 = \tau_1 + \frac{m\Delta_{vap}h}{\mathcal{P}_{th}}.$$

En injectant dans cette expression celle de τ_1 déterminée précédemment, on obtient finalement :

$$\tau_2 = \frac{m}{\mathcal{P}_{th}} [c(T_1 - T_0) + \Delta_{vap}h]. \text{ AN } \tau_2 = 1720 \text{ s} = 29 \text{ min}.$$

□ **Exercice 24.5. Température d'une résistance ★★ (Travail électrique, régime transitoire)**

1. Appliquons le premier principe au conducteur ohmique sous sa forme infinitésimale : $dU = \delta W + \delta Q$. D'après l'énoncé, le transfert thermique élémentaire reçu par le système au contact de l'atmosphère s'écrit $\delta Q = a(T_0 - T)dt$. En outre, le courant qui parcourt le conducteur ohmique fournit à celui-ci pendant dt un travail électrique élémentaire $\delta W = RI^2dt$. Enfin, pour le conducteur ohmique assimilé à une phase condensée idéale de capacité C , on peut écrire $dU = CdT$. Finalement : $CdT = a(T_0 - T)dt + RI^2dt$ soit

$$\frac{dT}{dt} + \frac{a}{C}T = \frac{a}{C}T_0 + \frac{RI^2}{C}. \text{ On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants de$$

constante de temps $\tau = \frac{C}{a}$.

2. La température limite T_1 correspond à la solution particulière de l'équation précédente. On a

$$\text{ainsi : } 0 + \frac{a}{C}T_1 = \frac{a}{C}T_0 + \frac{RI^2}{C} \text{ d'où } a = \frac{RI^2}{T_1 - T_0}. \text{ AN } a = 5,00 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

□ **Exercice 24.6. Mise en contact de deux solides ★★ (Bilans, régime transitoire)**

1. Il y a équilibre thermique, les températures des deux corps sont égales à T_f .

2. Appliquons le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = Q + W = 0$$

Les deux corps sont indilatables ($W = 0$) et les parois extérieures ne permettent pas les transferts thermiques ($Q = 0$).

L'extensivité de l'énergie interne permet d'écrire :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2.$$

D'après le modèle des phases condensée incompressibles :

$$\Delta U = C(T_f - T_1^\circ) + C(T_f - T_2^\circ)$$

Aussi :

$$T_f = \frac{T_1^\circ + T_2^\circ}{2}$$

3. Entre les instants t et $t + dt$:

$$U(t + dt) - U(t) = dU = \delta Q + \delta W = 0 = CdT_1 + CdT_2$$

soit :

$$dT_1 = -dT_2$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\dot{T}_1 = -\dot{T}_2 \Rightarrow \frac{d(T_1 + T_2)}{dt} = 0 \Rightarrow T_1(t) + T_2(t) = \text{constante}$$

La constante se détermine à l'aide des conditions initiales :

$$\boxed{\text{constante} = T_2^0 + T_1^0 = 2T_f}$$

4. Appliquons le premier principe au solide 1 :

$$dU_1 = \delta Q_{2 \rightarrow 1} + \delta W_{2 \rightarrow 1} = \delta Q_{2 \rightarrow 1} = \alpha [T_2(t) - T_1(t)] dt$$

D'autre part :

$$dU_1 = CdT_1$$

On en déduit :

$$C \frac{dT_1}{dt} = \alpha [T_2(t) - T_1(t)] = \alpha [2T_f - 2T_1]$$

soit :

$$\frac{dT_1}{dt} + \frac{2\alpha}{C} T_1 = \frac{2\alpha}{C} T_f$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$T_1(t) = Ae^{-\frac{2\alpha}{C}t} + T_f$$

On détermine A avec la condition initiale :

$$A + T_f = T_1^0$$

soit :

$$\boxed{T_1(t) = (T_1^0 - T_f) e^{-\frac{2\alpha}{C}t} + T_f}$$

5. On déduit de la question 3 que :

$$\boxed{T_2(t) = (T_f - T_1^0) e^{-\frac{2\alpha}{C}t} + T_f}$$

Les courbes obtenues pour $T_2^0 > T_1^0$:

