DM n°8 : Force centrale et Cristallographie

Exercice 1 : Énergie nécessaire pour mettre un satellite artificiel en orbite

1 – $\mathscr{E}_p = -\mathscr{G} M_T m/r = -\mathscr{G} M_T m/(R_T + z)$

2 – On peut retrouver ce résultat à l'aide de la loi de Newton dans le référentiel géocentrique (galiléen) en coordonnées polaires

$$m\left(-\frac{v^2}{r}\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\right) = -\mathscr{G}\frac{M_T m}{r^2}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_T}{r}} = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_T}{R_T+z}}}$$

3 – En utilisant les définitions :

$$\boxed{\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \mathscr{G}\frac{M_T m}{2(R_T+z)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathrm{e}_p = -\mathscr{G}\frac{M_T m}{2(R_T+z)}}$$

4 – $\mathscr{E}_m = -162\,\mathrm{GJ}$. L'ordre de grandeur est difficile à interpréter, mais on peut constater que $\mathscr{E}_c = -1/2\mathscr{E}_m$ représente une énergie cinétique considérable...

5 – Il s'agit de l'axe Nord-Sud, fixe dans le référentiel géocentrique[1], qui tourne à la vitesse $\Omega = 2\pi/24\,\mathrm{h} = 7{,}3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

6 – La distance d'un point posé au sol à l'axe Nord-Sud est $R_T\cos\lambda$, d'où en coordonnées cylindriques d'axe Nord-Sud

$$\boxed{\vec{v} = R_T\cos\lambda\,\Omega\vec{u}_\theta}$$

7 – D'après le résultat précédent,

$$\boxed{\mathscr{E}_{m,0} = \frac{1}{2}m(R_T\cos\lambda\,\Omega)^2 - \mathscr{G}\frac{M_T m}{R_T}}$$

8 – L'énergie mécanique à atteindre étant fixée (on a décidé d'une orbite), plus l'énergie mécanique initiale est élevée, moins il faudra dépenser de carburant (qui apporte un travail de façon non conservative) pour réaliser la mise en orbite. D'après la formule précédente, il vaut mieux diminuer λ (se rapprocher de l'équateur) afin d'augmenter l'énergie cintéique initialement fournie par la rotation terrestre. Kourou est donc le meilleur site parmi ceux proposés.

9 – En rassemblant les résultats précédents,

$$\Delta\mathscr{E}_m = -\mathscr{G}\frac{M_T m}{2(R_T+z)} - \left(\frac{1}{2}m(R_T\cos\lambda\,\Omega)^2 - \mathscr{G}\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\mathscr{E}_m = \mathscr{G}M_T m\frac{R+2z}{2R(R+z)} - \frac{1}{2}m(R_T\cos\lambda\,\Omega)^2} = \underline{212\,\mathrm{GJ}}$$

On constate que l'ordre de grandeur est le même que précédemment. Cela correspond donc à environ $\Delta\mathscr{E}_m/\mathscr{E}_{\text{comb}} = 15{,}8\,\mathrm{t}$ de carburant. Cependant, cette estimation est en fait très basse : elle ne tient pas compte de la fusée elle-même, du carburant lui-même, et surtout des frottements...

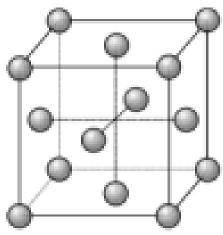
10 – En soustrayant $\Delta\mathscr{E}_m$ pour deux valeurs différentes de λ :

$$\boxed{\Delta\mathscr{E}_{m,\text{gain}} = \frac{1}{2}mR_T^2\Omega^2(\cos^2\lambda_1 - \cos^2\lambda_2)} = \underline{0{,}33\,\mathrm{GJ}}$$

ce qui semble peu en comparaison des valeurs absolues calculées précédemment ; mais on constate que cela fait tout de même 24 kg de mélange carburant économisé.

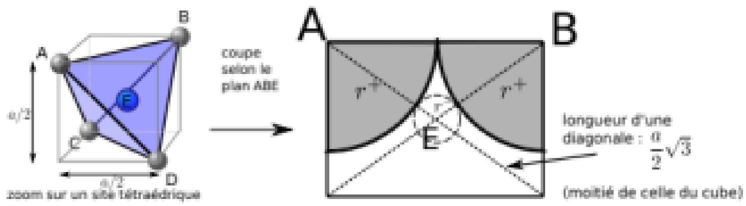
Exercice 2 : Etude de l'oxyde de zirconium

1. Le zirconium appartient au bloc d. Il s'agit d'un métal.
2. Structure CFC ci-contre.



Il y a $N_+ = 8 \times 1/8 + 6 \times 1/2 = \mathbf{4}$ cations par maille.

3. On lit dans le cours que $C = 0,74$, valeur maximale possible pour des sphères identiques.
4. Les sites tétraédriques sont situés au centre des cubes d'arête $a/2$, il y en a 8 .
5. On s'aide du schéma ci-dessous.



On a $AE = \dfrac{\text{grande diagonale}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ donc $\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = r^+ + r^-$, d'où $\boxed{r^- = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} - r^+}$.

6. Il y a 8 anions par maille (car 8 sites tétraédriques).
7. 4 cations et 8 anions, donc formule du type Zr_4O_8, qu'on simplifie en $\boxed{ZrO_2}$.
   On vérifie que la neutralité est satisfaite : 2 anions O^{2-} compensent bien un cation Zr^{4+}.
8. Coordinence des anions (dans les sites) par rapport aux cations (sur la maille CFC) : **4**, car ils sont en contact avec les quatre cations qui délimitent un site tétraédrique. Coordinence des cations (sur la maille CFC) par rapport aux anions (dans les sites tétraédriques) : **8**, car ils sont en contact avec les anions contenus dans les 8 sites adjacents.
9. $\rho = \dfrac{8m_O + 4m_{Zr}}{a^3}$, d'où $\boxed{\rho = \dfrac{8M_O + 4M_{Zr}}{\mathcal{N}_A a^3}}$.