Généralités sur les machines thermiques

☐ Exercice 26.1. Performances d'un moteur réel ★

☐ Exercice 26.2. Efficacité d'un réfrigérateur ★

Machines à pistons

☐ Exercice 26.3. Cycle de Beau de Rochas d'un moteur à quatre temps ★★

1 Les transformations s'identifient aisément à partir des variations de volume, et en vérifiant la compatibilité raisonnable avec les variations de pression :

A-B : admission B-C : compression C-E : combustion E-A : échappement.

2 L'aire d'un cycle moteur dans le diagramme de Watt correspond au travail $|W|$ libéré au cours du cycle. On constate qu'il y a ici deux « boucles » dans ce cycle : un travail moteur est produit lors des étapes de compression et combustion, mais un travail résistant est consommé lors du renouvellement du mélange gazeux. Ce n'est pas surprenant, car ce renouvellement nécessite de repousser les gaz préalablement contenus dans le moteur.

3 On introduit le point D comme étant celui auquel la pression est maximale, voir figure 1. On peut alors adopter les modélisations suivantes :

A-B : isobare B-C : adiabatique réversible C-D : isochore D-E : adiabatique réversible
E-B : isochore (chute de pression dès que la soupape d'échappement s'ouvre) B-A : isobare

Les équations des branches se déterminent directement pour les isobares et isochores, et en utilisant la loi de Laplace pour les adiabatiques réversibles. Ainsi,

- A-B : $P = P_A$;
- B-C : $PV^\gamma = \text{cte}$ soit $P = \dfrac{P_B {V_2}^\gamma}{V^\gamma}$;
- C-D : $V = V_1$;
- D-E : $PV^\gamma = \text{cte}$ soit $P = \dfrac{P_D {V_1}^\gamma}{V^\gamma}$;
- E-B : $V = V_2$;
- B-A : $P = P_A$.

4 Par définition, le rendement du moteur est défini à partir du travail total W_{tot} et du transfert thermique total $Q_{\text{c,tot}}$ échangé avec la source chaude,

$$\eta = -\frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{c,tot}}} = -\frac{W_{BC} + W_{DE}}{Q_{CD}}$$

car il n'y a pas d'échange de travail lors des isochores et Q_{EB} se fait avec l'extérieur et n'est donc pas coûteux. D'après le premier principe appliqué au gaz sur le cycle,

$$W_{BC} + W_{DE} + Q_{CD} + Q_{EB} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\eta = \frac{Q_{CD} + Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}}}\,.$$

Comme $Q_{EB} < 0$ on a bien $\eta < 1$.

5 Au cours de l'isochore C-D, d'après le premier principe appliqué au gaz contenu dans le cylindre de combustion,

$$\Delta U_{CD} \underset{\text{1er ppe}}{\underset{\uparrow}{=}} Q_{CD} + 0 \underset{\text{Joule}}{\underset{\uparrow}{=}} C_V\,(T_D - T_C)$$

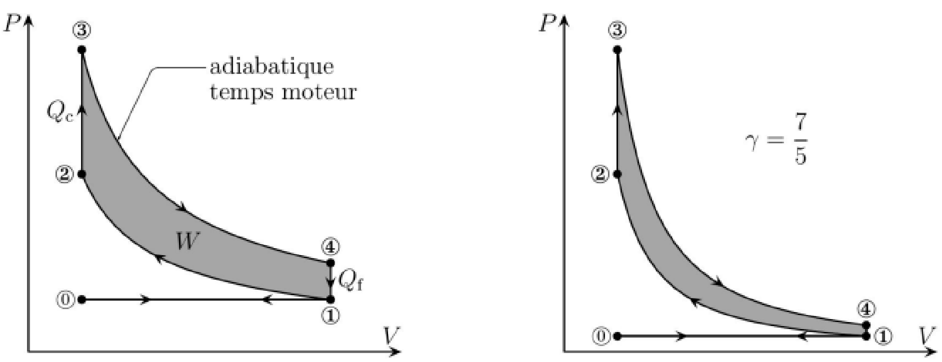

Figure 1 – **Représentation du cycle de Beau de Rochas dans le diagramme de Watt.** Le diagramme de gauche est déformé pour mieux visualiser le cycle, mais le diagramme de droite correspond au cycle d'un gaz parfait

et de même, au cours de l'isochore E-B,

$$Q_{EB} = C_V\,(T_B - T_E)\;.$$

On en déduit alors

$$\boxed{\eta = 1 + \frac{T_B - T_E}{T_D - T_C}\,.}$$

Pour passer aux volumes, la loi des gaz parfaits n'apporte rien car elle fait intervenir les pressions, qui ne sont pas plus connues que les températures. Il vaut mieux appliquer la loi de Laplace sous la forme $TV^{\gamma-1}$ = cte sur les adiabatiques et ensuite simplifier. On a alors, avec $\alpha = V_2/V_1$,

$$\begin{cases} T_B V_2^{\gamma-1} = T_C V_1^{\gamma-1} \\ T_D V_1^{\gamma-1} = T_E V_2^{\gamma-1} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T_C = T_B\alpha^{\gamma-1} \\ T_D = T_E\alpha^{\gamma-1} \end{cases}$$

On réécrit alors le rendement

$$\eta = 1 - \frac{T_E - T_B}{T_E\alpha^{\gamma-1} - T_B\alpha^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$$

d'où on conclut finalement

$$\boxed{\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma}\,.}$$

Comme $\gamma > 1$, il faut choisir un rapport de compression élevé pour optimiser le rendement du cycle ... mais des limitations technologiques, notamment sur l'auto-inflammation du carburant qu'il faut éviter, imposent de limiter $\alpha \lesssim 10$.

□ Exercice 26.4. Moteur de Stirling ★★

$\boxed{1}$ Faire le schéma. Le cycle est parcouru dans le sens horaire, il s'agit donc d'un cycle **moteur**.

$\boxed{2}$ • **Transformation 1 → 2 :** isotherme, donc

$$W_{1\to2} = -\int_{1\to2} P\mathrm{d}V = -\int_{1\to2} nRT_\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}V}{V} \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_{1\to2} = -nRT_\mathrm{f}\ln\frac{V_2}{V_1}\,.}$$

Le bilan d'énergie interne s'écrit

$$\Delta_{1\to2}U \underset{\text{1er P}}{\overset{\uparrow}{=}} Q_{1\to2} + W_{1\to2} \underset{\text{GP isoT}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \quad \text{donc} \quad Q_{1\to2} = -W_{1\to2} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_{1\to2} = nRT_\mathrm{f}\ln\frac{V_2}{V_1}\,.}$$

• **Transformation 2 → 3 :** isochore, donc

$$\boxed{W_{2\to3} = 0}$$

et ainsi

$$\Delta_{2\to3}U \underset{\text{1er P}}{\overset{\uparrow}{=}} Q_{2\to3} \underset{\text{GP}}{\overset{\uparrow}{=}} C_V\,(T_3 - T_2) \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q_{2\to3} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f})\,.}$$

• **Transformation 3 → 4 :** isotherme également,donc

$$\boxed{W_{3\to4} = -nRT_\mathrm{c}\ln\frac{V_1}{V_2} \quad \text{et} \quad Q_{3\to4} = nRT_\mathrm{c}\ln\frac{V_1}{V_2}\,.}$$

• **Transformation 4 → 1 :** de nouveau isochore, d'où

$$\boxed{W_{4\to1} = 0 \quad \text{et} \quad Q_{4\to1} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{c})\,.}$$

> *Pour s'assurer qu'il n'y a pas d'erreur de calcul, on peut vérifier que la somme (algébrique) des énergies reçues par le système est nulle, conformément au premier principe appliqué à l'ensemble du cycle.*

Le travail total échangé au cours du cycle vaut

$$W = W_{1\to2} + W_{3\to4} = nR(T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f})\ln\frac{V_2}{V_1} < 0$$

car $V_2 < V_1$. Sur l'ensemble du cycle, le gaz fournit du travail, il s'agit donc bien d'un cycle moteur.

3 La production énergétiqe du système est le travail total $W = W_{1\to2} + W_{3\to4} < 0$ qu'il fournit. Le coût est le transfert thermique qu'il reçoit de la source chaude, $Q_c = Q_{2\to3} + Q_{3\to4} > 0$. Le rendement est donc défini par

$$\eta = \left|\frac{W}{Q_c}\right| = -\frac{W_{1\to2} + W_{3\to4}}{Q_{2\to3} + Q_{3\to4}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\eta = \frac{(T_c - T_f)\ln\dfrac{V_1}{V_2}}{\dfrac{1}{\gamma-1}(T_c - T_f) + T_c \ln\dfrac{V_1}{V_2}} = 0{,}32\,.}$$

4 Le transfert thermique $Q_{2\to3}$, qui diminue le rendement, est exactement opposé au transfert thermique $Q_{4\to1}$. Plutôt que de perdre le transfert thermique $Q_{4\to1}$ en le cédant à la source froide, l'idée de Stirling consiste à le céder au régénérateur, qui le rendra au gaz lors de l'étape $2 \to 3$. Ce transfert thermique n'est alors plus fourni par la source chaude, ce qui est plus économique pour un même travail produit.

5 Comme $Q_{2\to3}$ n'est plus fourni par la source chaude, il ne compte plus dans le rendement, qui devient

$$\eta = \left|\frac{W}{Q_c}\right| = -\frac{W_{1\to2} + W_{3\to4}}{Q_{3\to4}} = \frac{T_c - T_f}{T_c} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0{,}5\,.}$$

Machines à écoulement de fluide

□ **Exercice 26.5. Machine à vapeur : cycle de Rankine ★**

□ **Exercice 26.6. Générateur à gaz suivant le cycle de Brayton ★★**

1 Voir figure 2.

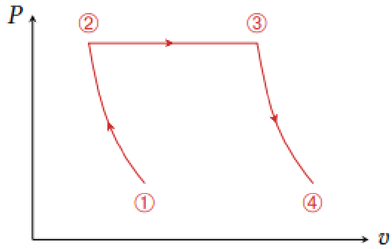

Figure 2 – Cycle de Brayton dans le diagramme de Clapeyron.

2 La loi de Laplace s'écrit

$$TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{cte}\,.$$

Par application à l'étape 1-2,

$$T_2\, P_2^{(1-\gamma)/\gamma} = T_1\, P_1^{(1-\gamma)/\gamma} \qquad \text{d'où} \qquad T_2 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} T_1 = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} T_1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T_2 = \lambda T_1 > T_1\,.}$$

De même, au cours de l'étape 3-4,

$$T_4 = \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} T_3\,.$$

Or $P_4 = P_1$, $P_3 = P_2$, et $T_3 = \tau T_1$ donc

$$T_4 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \tau T_1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T_4 = \frac{1}{\lambda} T_3 = \frac{\tau}{\lambda} T_1\,.}$$

3 Le passage du gaz dans le compresseur étant rapide, on peut le supposer adiabatique. Ainsi,

$$h_2 - h_1 = w_c + \underbrace{q_{12}}_{=0} \qquad \text{donc} \qquad w_c = h_2 - h_1 = c_P(T_2 - T_1) = c_P(\lambda T_1 - T_1)\,,$$

d'où

$$\boxed{w_c = c_P(\lambda - 1)T_1\,.}$$

Le premier principe industriel appliqué à la chambre de combustion donne

$$h_3 - h_2 = q_c + \underbrace{w_{23}}_{=0} \qquad \text{d'où} \qquad q_c = h_3 - h_2 = c_P(T_3 - T_2) = c_P(\tau T_1 - \lambda T_1)$$

et ainsi

$$\boxed{q_c = c_P(\tau - \lambda)T_1\,.}$$

Enfin, dans la turbine, compte tenu de la convention d'algébrisation choisie pour w_T,

$$h_4 - h_3 = -w_T + \underbrace{q_{34}}_{=0} \qquad \text{donc} \qquad w_T = h_3 - h_4 = c_P(T_3 - T_4) = c_P\left(\tau T_1 - \frac{\tau}{\lambda}T_1\right)$$

et ainsi

$$\boxed{w_T = c_P\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\tau\, T_1\,.}$$

$\boxed{4}$ Compte tenu du fonctionnement du dispositif,

$$w_T = w_a + w_c \qquad \text{donc} \qquad w_a = w_T - w_c$$

et d'après les questions qui précèdent

$$\boxed{w_a = c_P\left[\tau - \frac{\tau}{\lambda} - \lambda + 1\right]T_1\,.}$$

$\boxed{5}$ D'après les questions précédentes,

$$\mathcal{R} = \frac{w_a}{w_c} = \frac{w_T - w_c}{w_c} = \frac{w_T}{w_c} - 1\,.$$

Avec ce qui précède,

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\tau}{\lambda} - 1 \simeq 1{,}4\,.}$$

Cela signifie que le compresseur et l'alternateur consomment environ chacun la moitié de l'énergie fournie par les gaz à la turbine ... alors que le but est de transmettre le maximum d'énergie à l'alternateur. Pour l'améliorer, il faut augmenter τ et diminuer λ. Comme T_1 et P_1 sont fixées (air atmosphérique), il faut diminuer la pression en sortie du compresseur et augmenter la température en sortie de la chambre de combustion, ce qui revient à fournir une énergie thermique de combustion plus élevée aux gaz. Cela pourrait être possible en augmentant la fraction de méthane au sein du mélange gazeux ... mais il faudrait s'assurer que cela n'affecte pas le rendement, ce que notre modèle simplifié ne peut pas prévoir.

$\boxed{6}$ Le rendement est le rapport entre l'énergie utile produite au cours du cycle, ici le travail $w_a > 0$ fourni à l'alternateur, et l'énergie coûteuse dépensée, ici la chaleur de combustion $q_c > 0$:

$$\boxed{\eta = \frac{w_a}{q_c}\,.}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{c_P\left[\tau - \frac{\tau}{\lambda} - \lambda + 1\right]T_1}{c_P(\tau - \lambda)T_1} \\
&= \frac{\tau - \lambda - \frac{\tau}{\lambda} + 1}{\tau - \lambda} \\
&= \frac{\tau - \lambda}{\tau - \lambda} - \frac{1}{\lambda}\frac{\tau - \lambda}{\tau - \lambda}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{\lambda} = 0{,}48\,.}$$

Problème ouvert

□ Exercice 26.7. Coût de fonctionnement d'un frigo ★★

Supposons que les bouteilles de jus de fruit sont à température initiale $T_I = 25\,°\mathrm{C}$, et que la température finale (celle du frigo) vaut $T_F = 5\,°\mathrm{C}$. Commençons par calculer l'énergie nécessaire au refroidissement.

- Système : contenu du frigo.
- Bilan des échanges énergétiques :
  → transfert thermique reçu de la part du fluide frigorigène : $Q_{\text{frigo}} < 0$ que l'on cherche à déterminer ;
  → transfert thermique de fuite : $Q_{\text{fuite}} = +\mathcal{P}_{\text{fuite}}\,\Delta t > 0$ avec $\mathcal{P}_{\text{fuite}} = 10\,\mathrm{W}$ et $\Delta t = 1\,\mathrm{h} = 3{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{s}$ (attention au signe : c'est le contenu du frigo qui reçoit réellement de l'énergie).
- Bilan d'enthalpie : on assimile le jus de fruit à de l'eau du point de vue thermique.

$$\Delta H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} Q_{\text{frigo}} + Q_{\text{fuite}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modèle}}}{=} m_{\text{jus}}\, c_{\text{eau}}\,(T_F - T_I)$$

où $m_{\text{jus}} = 6\,\mathrm{kg}$. On en déduit

$$Q_{\text{frigo}} = m_{\text{jus}}\, c_{\text{eau}}\,(T_F - T_I) - \mathcal{P}_{\text{fuite}}\,\Delta t = -5{,}4 \cdot 10^5\,\mathrm{J}\,.$$

Calculons maintenant le coût en énergie électrique du refroidissement. On fait l'hypothèse que l'énergie électrique fournie au frigo ne sert qu'à faire tourner le compresseur. Par définition de l'efficacité d'un frigo, $e = |Q_{\text{froid}}/W|$ où les échanges énergétiques sont ceux du fluide. Ici, on a donc $e = \left|Q_{\text{frigo}}\right| / W_{\text{élec}}$. Ainsi,

$$W_{\text{élec}} = \frac{\left|Q_{\text{frigo}}\right|}{e} = 3{,}6 \cdot 10^5\,\mathrm{J}\,.$$

Enfin, calculons le prix en euros de cette énergie, sachant que $1\,\mathrm{kWh} = 1 \cdot 10^3\,\mathrm{W} \times 3{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{s} = 3{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$. On trouve

$$\boxed{p = \frac{3{,}6 \cdot 10^5\,\mathrm{J}}{3{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{J}} \times 0{,}2\,€ \simeq 2\,\text{centimes}\,.}$$