Introduction

Ce dernier cours de mécanique est une introduction à la mécanique des solides et en particulier au cas de la rotation autour d'un axe fixe. Cette branche de la mécanique est un sujet plus complexe que la mécanique du point matériel à laquelle nous nous sommes restreints cette année. La mécanique des solides ne sera pas approfondie en cours de physique, mais davantage en SI.

I] Mouvement d'un solide

1. Description du mouvement

a. Définition

On parlera de **solide** (ou **système de points matériels**) pour désigner un système **indéformable** dont **les points restent à distance constante les uns des autres**.

On oppose les solides (indéformables) aux systèmes déformables dont les points peuvent se déplacer les uns aux autres.

Exemples : Une boule de billard est un solide indéformable tandis qu'un ressort est un système déformable

b. Nombre de degrés de liberté

De part son extension, repérer un solide dans l'espace demande d'indiquer à la fois sa «position» et son «orientation» :

- Repérer la «position» signifie donner les **trois coordonnées spatiales** d'un point de repère sur le solide, souvent son **centre d'inertie (= centre de masse = centre de gravité**).
- Repérer «l'orientation» signifie définir un repère lié au solide (on parle de référentiel barycentrique) et donner **les trois angles** entre les axes de ce repère et les axes d'un autre repère lié au référentiel d'étude.

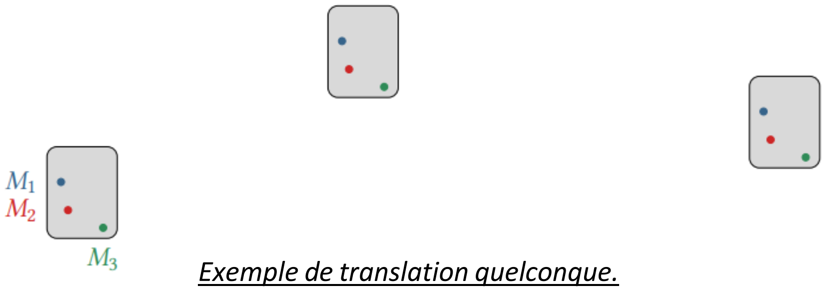
Il faut donc **six paramètres** pour repérer un solide dans l'espace.

Dans le cadre du cours de physique, on se restreindra à des cas simples où certains de ces six degrés de liberté restent constants au cours du mouvement (translation et rotation autour d'un axe fixe).

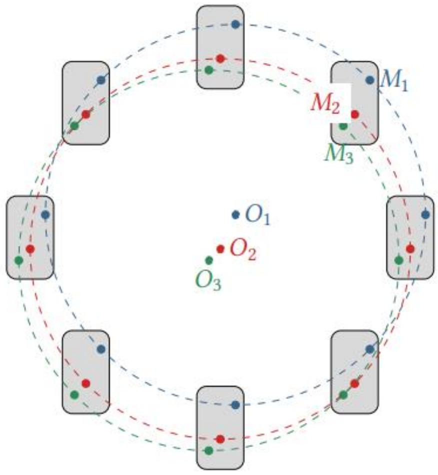
2. Cas particulier : translation

a. Définition et exemples

Un solide a un mouvement de **translation** par rapport à un référentiel $\Re$ si son orientation reste fixe au cours du temps. **Tous les points d'un solide en translation ont le même vecteur vitesse**.



Exemple de translation quelconque.



Exemple de translation circulaire.
(Une translation est dite circulaire si la trajectoire de chaque point du solide est un arc de cercle)

b. Etude du mouvement de translation

Comme tous les points d'un solide en translation ont le même vecteur vitesse, il suffit d'en étudier un seul pour caractériser entièrement le mouvement du solide, le plus intéressant étant le centre de masse ou **centre d'inertie G**. Ainsi, un mouvement de translation présente au plus **3** degrés de liberté.

Centre de masse : Si on décompose par la pensée le solide en un ensemble de N points matériels M_i dotés d'une masse m_i, alors G en est le centre de masse :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{tot}}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{OM_i} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

Théorème de la résultante cinétique : Le théorème de la résultante cinétique (**TRC**) est une généralisation aux solides du **PFD**, qui ne concerne en toute rigueur que les points matériels.

Pour un solide S de masse m en mouvement par rapport à un référentiel $\mathfrak{R}$ galiléen :

$$m\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} = \sum \overrightarrow{f_{ext}}$$

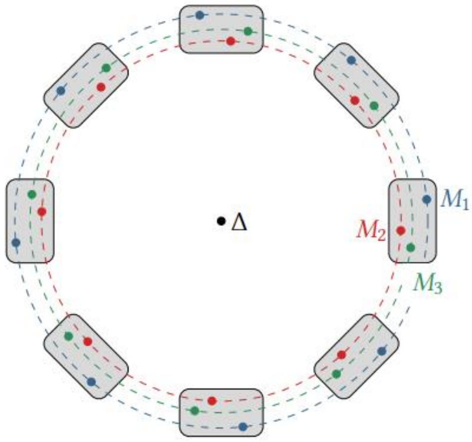
En conclusion, l'étude d'un mouvement de translation se mène exactement comme celle du mouvement d'un point matériel G auquel serait concentrée toute la masse du solide

3. Rotation autour d'un axe fixe

a. Définition et exemples

Un solide a un **mouvement de rotation autour d'un axe Δ fixe** dans un référentiel $\mathfrak{R}$ **si la distance de tout point du solide à tout point de cet axe est constante au cours du mouvement.**

Un mouvement de rotation autour d'un axe fixe présente **un seul degré de liberté** : l'angle par rapport à une direction de référence.



Exemple de rotation autour d'un axe fixe.

Remarque : Il ne faut pas confondre translation circulaire et rotation.

b. Insuffisance du théorème de la résultante cinétique ★

Application : *Considérons une turbine de centrale hydroélectrique, dont le mouvement de rotation est imposé par un écoulement d'eau et qui est couplée à un alternateur en vue de produire de l'électricité.*

1) *Déterminer la position du centre de masse* ***G****, en déduire sa vitesse* $\overrightarrow{v_G}$.

2) Appliquer le ***TRC***, en déduire la nécessité d'une autre loi dynamique pour caractériser le mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

II] Théorème du moment cinétique

1. Moment cinétique d'un système de points

a. Définition

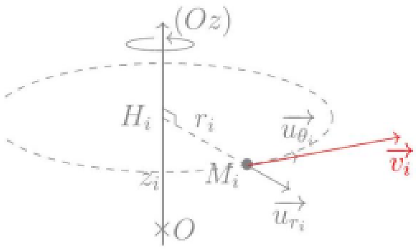
Le **moment cinétique** du système de points $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{M_i}(\boldsymbol{m_i})\}_{i\in[1,n]}$ par rapport à un point $\boldsymbol{O}$ fixe dans le référentiel $\mathfrak{R}$ est la somme des moments cinétiques de chacun des points par rapport à $\boldsymbol{O}$:

$$\overrightarrow{L_O(S)} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{L_O(M_\iota)} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM_\iota} \wedge m_i \vec{v}(M_i)$$

Dans le cas de la rotation autour d'un axe orienté $\Delta = (\boldsymbol{O}; \overrightarrow{\boldsymbol{u_\Delta}})$ fixe dans le référentiel $\mathfrak{R}$, on peut projeter le moment cinétique sur l'axe pour obtenir une formulation scalaire :

$$L_\Delta(S) = \sum_{i=1}^{N} L_\Delta(M_i) = \sum_{i=1}^{N} (\overrightarrow{OM_\iota} \wedge m_i \vec{v}(M_i) \bullet \overrightarrow{u_\Delta})$$

b. Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe ★



On étudie un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe dans le référentiel $\mathfrak{R}$ d'étude, à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

Les points $\boldsymbol{M_i}$ du solide décrivent des cercles de centre $\boldsymbol{H_i}$, projeté orthogonal de $\boldsymbol{M_i}$ sur l'axe de rotation, et de rayon $\boldsymbol{r_i = H_iM_i}$.

On repère les points $\boldsymbol{M_i}$ par leurs coordonnées cylindriques : $(\boldsymbol{r_i}, \boldsymbol{\theta_i}, \boldsymbol{z_i})$, avec :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM_i}} = \boldsymbol{r_i}\overrightarrow{\boldsymbol{U_r}} + \boldsymbol{z_i}\overrightarrow{\boldsymbol{U_z}} \quad et \quad \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M_i}) = \boldsymbol{r_i}\dot{\theta}\overrightarrow{\boldsymbol{U_\theta}}$$

Le moment cinétique d'un point $\boldsymbol{M_i}$ du solide est :

$$\boldsymbol{L_\Delta(M_i)} = (\overrightarrow{\boldsymbol{OM_i}} \wedge \boldsymbol{m_i}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M_i})) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u_\Delta}}$$

$$\boldsymbol{L_\Delta(M_i)} = ((\boldsymbol{r_i}\overrightarrow{\boldsymbol{U_{r_i}}} + \boldsymbol{z_i}\overrightarrow{\boldsymbol{U_z}}) \wedge \boldsymbol{m_i r_i}\dot{\theta}\overrightarrow{\boldsymbol{U_{\theta_i}}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u_\Delta}}$$

$$\boldsymbol{L_\Delta(M_i)} = \boldsymbol{m_i}(\boldsymbol{r_i}^2\dot{\theta}\overrightarrow{\boldsymbol{U_z}} - \boldsymbol{z_i r_i}\dot{\theta}\overrightarrow{\boldsymbol{U_{r_i}}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u_\Delta}}$$

$$\boldsymbol{L_\Delta(M_i)} = \boldsymbol{m_i r_i}^2\dot{\theta}$$

Donc le moment cinétique du solide $\boldsymbol{S}$ s'exprime donc :

$$\boldsymbol{L_\Delta(S)} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L_\Delta(M_i)} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{m_i r_i}^2\dot{\theta} = \dot{\theta} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{m_i r_i}^2}_{\boldsymbol{Moment\ d'inertie\ J_z}}$$

<u>A retenir :</u> Le moment cinétique d'un solide $\boldsymbol{S}$ en rotation autour de l'axe fixe Δ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ **(**noté aussi $\boldsymbol{\omega}$**)**, par rapport à l'axe orienté $\Delta = (\boldsymbol{O}; \overrightarrow{\boldsymbol{u_\Delta}})$ s'écrit :

$$\boldsymbol{L_\Delta(S)} = \boldsymbol{J_\Delta(S)} \times \dot{\theta}$$

Avec $\boldsymbol{J_\Delta(S)}$ $(\boldsymbol{kg.m^2})$, le moment d'inertie du solide $\boldsymbol{S}$ par rapport à l'axe de rotation $\boldsymbol{\Delta}$.

<u>Remarques :</u>

- $\boldsymbol{J_\Delta(S)}$ *est un nombre réel strictement positif.*
- $\boldsymbol{L_\Delta(S)}$ *est positif si la rotation du solide a lieu dans le sens direct autour de* Δ *(*$\dot{\theta} > \boldsymbol{0}$*) et négatif si la rotation du solide a lieu dans le sens indirect autour de* Δ *(*$\dot{\theta} < \boldsymbol{0}$*)*.

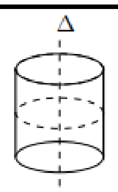
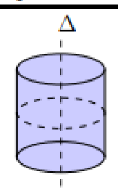
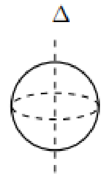
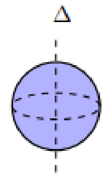
2. Moment d'inertie

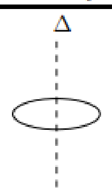
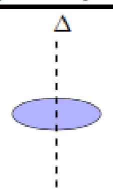
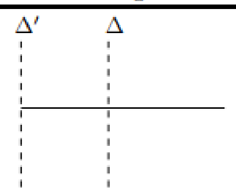
Le moment d'inertie mesure l'**inertie d'un objet à être mis en rotation,** il s'exprime par la relation :

$$J_\Delta(S) = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2 \quad ou \quad J_\Delta(S) = \iint r^2 dm$$

Avec r la distance par rapport à l'axe de rotation Δ.

On donne les moments d'inertie par rapport à l'axe Δ pour des solides homogènes de masse totale m :

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	sphère (vide) de rayon R	boule (pleine) de rayon R
			
$J_\Delta = mR^2$	$J_\Delta = 1/2mR^2$	$J_\Delta = mR^2$	$J_\Delta = 2/5mR^2$

anneau de rayon R	disque de rayon R	barre de longueur L	
			
$J_\Delta = mR^2$	$J_\Delta = mR^2/2$	$J_{\Delta'} = 1/3mL^2$	$J_\Delta = 1/12mL^2$

3. Moment résultant des actions mécaniques

On rappel l'expression du moment d'une force s'exerçant sur le point matériel M par rapport à un point O : $\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$.

Le **moment résultant** des forces par rapport au point O dans le cas d'un système de point $S = \{M_i(m_i)\}_{i\in[1,n]}$ est la somme des moments des forces qui s'exercent sur chacun des points M_i :

$$\overrightarrow{M_O^{tot}} = \sum_i \overrightarrow{M_{O,i}}(\vec{F_i}) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F_i}$$

Le moment résultant n'est pas a priori égal au moment de la résultante, car les points d'application de tous les moments ne sont pas les mêmes.

Cependant, pour **une force volumique** comme le poids s'appliquant de **manière uniforme** en tout point d'un solide, on peut assimiler le moment résultant au moment de la résultante appliqué au centre de masse du solide :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{P}) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{g} = \sum_i m_i\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{g} = m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{g}$$

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$$

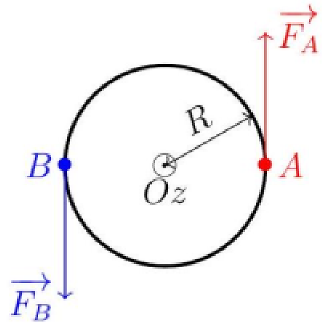
4. Couple

Un **couple** est un **ensemble d'actions mécaniques de résultante nulle et de moment résultant non nul**. Par abus de langage, « couple » désignera souvent le moment du couple, et sera souvent noté $\vec{\Gamma}$.

Une propriété remarquable des couples est que le moment résultant est **indépendant du point par rapport auquel on le calcule** (non démontré).

Exemple : La résultante des forces s'exerçant sur le volant s'exprime : $\vec{F} = \vec{F_A} + \vec{F_B} = \vec{0}$**.**

Le moment résultant des forces s'exerçant sur le volant s'exprime :



$$\overrightarrow{M_O^{tot}} = \vec{M_O}(\vec{F_A}) + \vec{M_O}(\vec{F_B}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_A} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F_B}$$

$$\overrightarrow{M_O^{tot}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_A} + \overrightarrow{-OA} \wedge \overrightarrow{-F_A} = 2\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_A}$$

$$\overrightarrow{M_O^{tot}} = 2RF_A\vec{u_z} \neq \vec{0}$$

5. Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème du moment cinétique : Soit un solide S en rotation autour d'un axe $\Delta = (O; \vec{u_\Delta})$ fixe dans $\mathfrak{R}$ galiléen :

$$\frac{dL_\Delta(S)}{dt} = \sum M_\Delta^{ext} \quad \Leftrightarrow \quad J_\Delta(S)\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \sum M_\Delta^{ext}$$

Avec J_Δ, le moment d'inertie de S par rapport à l'axe orienté Δ, constant pour un solide et M_Δ^{ext} le moment résultant des actions mécaniques extérieures par rapport à l'axe orienté Δ.

Preuve : Un solide est un ensemble de points matériels M_i. Notons $\overrightarrow{F_i^{ext}}$ la résultante des forces extérieures exercées en ce point. Comme on raisonne sur des points et non pas directement un solide, seules des forces sont à considérer. Le théorème du moment cinétique appliqué à chacun des points M_i par rapport à la droite Δ s'écrit :

$$\frac{dL_{\Delta,M_i}}{dt} = M_\Delta\left(\overrightarrow{F_i^{ext}}\right) \Rightarrow \sum_i \frac{dL_{\Delta,M_i}}{dt} = \sum_i M_\Delta\left(\overrightarrow{F_i^{ext}}\right) \Leftrightarrow \frac{dL_\Delta(S)}{dt} = \sum M_\Delta^{ext}$$

6. Application : Le pendule pesant

a. Liaison pivot parfaite

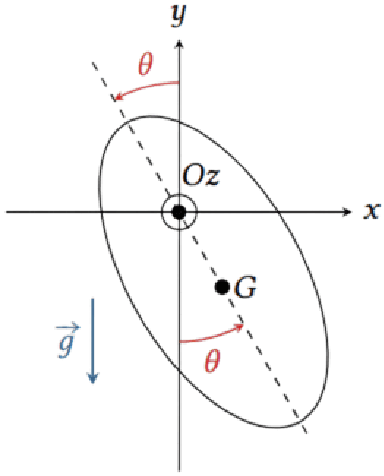
On appelle **liaison pivot** une liaison entre deux solides autorisant **un unique degré de liberté de rotation autour d'un axe**.

Lorsqu'un des deux solides est fixe dans le référentiel d'étude, le solide fixe est appelé **stator** et le solide en rotation **rotor**.

Une liaison pivot est dite **parfaite** si la rotation se fait **sans frottement**. On admettra que dans ce cas, **le moment par rapport à l'axe de rotation exercé par le stator sur le rotor est nul**.

b. Equation du mouvement ★

Application : *On considère le pendule pesant schématisé ci-contre, en rotation autour de l'axe fixe $(\boldsymbol{Oz})$ horizontal par une liaison pivot supposé. parfaite. On note $\boldsymbol{J}$ son moment d'inertie par rapport à $(\boldsymbol{Oz})$ et on pose $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{OG}$ la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse du pendule.*



1) *Déterminer par analyse dimensionnelle une pulsation caractéristique $\boldsymbol{\omega_0}$ des oscillations du pendule en considérant les paramètres : $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{g}$.*

2) *Lister les actions mécaniques subies par le pendule, leur résultante et leur moment par rapport à l'axe $(\boldsymbol{Oz})$.*

3) *En déduire l'équation du mouvement par application du théorème du moment cinétique.*

4) *Peut-on retrouver cette équation par application du théorème de la résultante cinétique ? Quelle information donne ce théorème ?*

Correction :

1) *On cherche :* $\boldsymbol{\omega_0 = J^{\alpha} \times d^{\beta} \times (mg)^{\gamma}}$

En passant à l'équation au dimension, il vient :

$$\boldsymbol{T^{-1} = (M.L^2)^{\alpha} \times L^{\beta} \times (M.L.T^{-2})^{\gamma} = M^{\alpha+\gamma}.L^{2\alpha+\beta+\gamma}.T^{-2\gamma}}$$

On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha + \gamma = 0} \\ \boldsymbol{2\alpha + \beta + \gamma = 0} \\ \boldsymbol{-2\gamma = -1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{\alpha = -\gamma = -\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{\beta = -\gamma - 2\alpha = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{\gamma = \frac{1}{2}} \end{matrix}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}}$$

2) *Bilan des actions mécaniques : Indispensable de préciser le point d'application des forces :*
- Le poids du pendule de résultante $\boldsymbol{\vec{P} = m\vec{g}}$ qui s'applique en $\boldsymbol{G}$ et de moment :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{M_O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \left(dsin(\theta)\overrightarrow{e_x} - dcos(\theta)\overrightarrow{e_y}\right) \wedge -mg\overrightarrow{e_y} = -mgdsin(\theta)\overrightarrow{e_z}}$$

D'où : $\boldsymbol{M_{(Oz)}(\vec{P}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{P}) \bullet \overrightarrow{e_z} = -mgdsin(\theta)}$.

- La liaison pivot est supposée parfaite. La résultante $\boldsymbol{\vec{R}}$ est non nulle mais de moment $\boldsymbol{\vec{M}}$ est nul par rapport à l'axe de rotation.

3) *Le théorème du moment cinétique s'écrit :*

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum M_\Delta^{ext} \quad \Leftrightarrow \quad J\frac{d\dot{\theta}}{dt} = J\ddot{\theta} = -mgd\sin(\theta)$$

Ce qui se met sous la forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J}\sin(\theta) = 0$$

On identifie la pulsation caractéristique : $\omega_0{}^2 = \frac{mgd}{J}$.

4) *Le théorème de la résultante cinétique :*

$$m\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} = \sum \overrightarrow{f_{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} = \vec{R} + m\vec{g}$$

Ce théorème ne permet pas d'aboutir à l'équation du mouvement car on ne sait rien de la force $\vec{R}$*, même pas sa direction. Par contre, une fois l'équation différentielle du mouvement obtenue par le TMC on peut utiliser le résultat pour déterminer la force* $\vec{R}$.

III] Energie en rotation

1. Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un système $S = \{M_i(m_i)\}_{i\in[1,n]}$ est égale à la somme des énergies cinétiques des points qui composent le système :

$$E_c(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \|\overrightarrow{v_i}\|^2$$

a. Solide en translation

Pour un solide, de masse m, en translation, tous les points ont même mouvement, donc ils ont tous le même vecteur vitesse $\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_G}$.

L'énergie cinétique d'un solide de masse m en translation s'écrit :

$$\boxed{E_c(S) = \frac{1}{2} m \|\overrightarrow{v_G}\|^2}$$

Un solide en translation s'étudie comme un point matériel confondu avec le centre d'inertie G du solide qui concentrerait toute la masse du solide.

b. Solide en rotation autour d'un axe fixe ★

Exprimons l'énergie cinétique du solide $(\boldsymbol{S})$ en rotation autour de l'axe Δ :

$$E_c(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \|\overrightarrow{v_i}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left\| r_i \dot{\theta} \overrightarrow{U_{\theta_i}} \right\|^2$$

$$E_c(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i {r_i}^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2}_{J_\Delta} \right) \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{E_c(S) = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2}$$

2. Puissance des actions mécaniques

La puissance d'une action mécanique de moment résultant $\boldsymbol{M_\Delta}$ appliquée à un solide en rotation à la vitesse $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ autour d'un axe Δ fixe s'exprime par :

$$\boxed{P = M_\Delta \dot{\theta}}$$

Preuve : Soit une force quelconque appliqué en un point $\boldsymbol{M}$ du solide : $\vec{F} = F_r \overrightarrow{e_r} + F_\theta \overrightarrow{e_\theta} + F_z \overrightarrow{e_z}$

Le moment par rapport à un l'axe $(\boldsymbol{Oz})$ fixe s'écrit : $M_{(Oz)}(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \bullet \overrightarrow{e_z} = rF_\theta$

Finalement, il vient :

$$P(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \vec{v} = F_\theta \times r\dot{\theta} = M_{(Oz)} \dot{\theta}$$

3. Théorème de la puissance cinétique ★

Les variations d'énergie cinétique d'un solide $(\boldsymbol{S})$ en rotation autour d'un axe Δ fixe dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}$ sont reliées à la puissance des actions mécaniques qu'il subit :

$$\boxed{\frac{dE_c(S)}{dt} = \sum_i P_i}$$

Preuve : Ecrivons le **TMC** appliqué à un solide $(\boldsymbol{S})$ de moment d'inertie $\boldsymbol{J_\Delta}$ et soumis à un ensemble d'actions mécaniques de moments résultants $\boldsymbol{M_i}$.

$$J_\Delta \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \sum_i M_i$$

En multipliant par $\dot{\theta}$**,** il vient directement :

$$\dot{\theta} \times J_\Delta \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \dot{\theta} \times \sum_i M_i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2\right) = \sum_i P_i$$

Application : *Etude énergétique du pendule pesant.*

1) *Exprimer l'énergie cinétique du pendule pesant.*

2) *Appliquer le* ***TPC*** *pour retrouver l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant.*

Correction :
1)

$$E_c(S) = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

2) *Le pendule pesant est soumis à son poids de moment (cf. calcul ci-dessus)* ***:***

$$M_{(Oz)}(\vec{P}) = -mgdsin(\theta)$$

La puissance du poids s'exprime :

$$P(\vec{P}) = M_{(Oz)}(\vec{P})\dot{\theta} = -mgdsin(\theta)\dot{\theta}$$

De plus, la liaison pivot étant supposée parfaite, le moment de la réaction du support est nul, il vient :

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2) = -mgdsin(\theta) \times \dot{\theta}$$

$$J\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgdsin(\theta) \times \dot{\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J}sin(\theta) = 0$$

4. Cas d'un système déformable : Le tabouret d'inertie ★

Application : *Une personne est assise sur un tabouret dont le siège peut tourner quasiment sans frottement autour d'un axe vertical* ***Δ****.*

La personne se met en rotation, les bras repliés sur elle même (état 1), à la vitesse angulaire ω_1. Ensuite elle détend les bras (état 2) et sa rotation se fait à une vitesse angulaire différente ω_2. (cf. https://www. youtube.com/watch?v=G6XSK72zZJc)

1) *Dans les états initial et final, le système est assimilable à un solide, de moments d'inertie par rapport à l'axe Δ notés J_1 dans l'état initial et J_2 dans l'état final. Comparer J_1 et J_2.*

2) *Que dire du moment cinétique scalaire L_Δ du système {personne-assise du siège } pendant cette opération ?*

3) *Trouver une relation entre les moments d'inertie et les vitesses angulaires initiaux et finaux. Conclure sur les vitesses angulaires.*

4) *Exprimer la variation de l'énergie cinétique, et commenter le résultat.*

5) *L'expérience est plus spectaculaire si la personne tient dans ses mains des haltères. Expliquer pourquoi.*

Correction :
1. Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe est donné par la somme des produits des masses par le carré de leurs distances à l'axe :

$$J = \sum m_i r_i^2.$$

Lorsque la personne replie ses bras, les masses des bras se rapprochent de l'axe de rotation, ce qui diminue r_i pour chaque élément de masse concerné. Ainsi, le moment d'inertie initial J_1 est plus petit que le moment d'inertie final J_2 lorsque les bras sont étendus :

$$\boxed{J_1 < J_2.}$$

2. Le TMC scalaire appliqué au système est $\dfrac{dL_\Delta}{dt} = \mathscr{M}_\Delta(\text{ poids }) + \mathscr{M}_\Delta(\text{ pivot })$.
On néglige les frottements donc le pivot est parfait d'où : $\mathscr{M}_\Delta(\text{ pivot }) = 0$.
D'autre part, le poids est parallèle à Δ donc $M_\Delta(\text{ poids }) = 0$. Ainsi L_Δ **est constant**.

3. $L_\Delta = J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \Rightarrow \boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{J_2}{J_1}}$.

Comme $J_1 < J_2$, on en déduit que $\omega_2 < \omega_1$. Autrement dit, en étendant les bras, la personne ralentit sa rotation. La vitesse de rotation est plus importante bras serrés comme dans la vidéo.

4.

$$\boxed{\Delta\mathscr{E}_c} = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}\times J_2\omega_2^2 \times \left(1 - \frac{J_1}{J_2}\times\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\times J_2\omega_2^2\times\left(1-\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) < 0}$$

Ce résultat ne s'explique avec le TEC que si on prend en compte des forces intérieures :

$$\Delta\mathscr{E}_c = W(\text{poids}) + W(\text{pivot}) + W_{\text{int}} < 0. \text{ En effet, } W(\text{ poids }) = W(\text{ pivot }) = 0$$

Le système ne peut être considéré comme un solide indéformable entre les états 1 et 2 .
5. Si la personne tient des haltères, leur masse augmente le moment d'inertie J_2 lorsqu'elle étend les bras. Comme le moment cinétique doit se conserver, une augmentation de J_2 entraîne une diminution encore plus grande de ω_2. La différence de vitesse angulaire devient plus spectaculaire, ce qui rend l'effet visuel plus marqué.

IV] Tableau récapitulatif : analogie entre translation et rotation

Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
z direction du mouvement	z axe de rotation
Position z Vitesse $v = \dot{z}$	Angle θ Vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$
Masse m Quantité de mouvement $p_z = mv_z = m\dot{z}$ Composantes des forces $F_{n,z} = \vec{F_n}\cdot\vec{e}_z$	Moment d'inertie J Moment cinétique $L_z = J\omega = J\dot{\theta}$ Moments et couples $\mathcal{M}_{z,n}$
Théorème de la résultante cinétique (projeté) : $\dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = m\ddot{z} = \sum_n F_{n,z}$	Théorème du moment cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\ddot{\theta} = \sum_n \mathcal{M}_{z,n}$
Énergie cinétique de translation $E_c = \frac{1}{2}mv^2$	Énergie cinétique de rotation $E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$
Puissance d'une action mécanique $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}$	Puissance d'une action mécanique $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z\omega$
Travail infinitésimal $\delta W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M}$	Travail infinitésimal $\delta W = \mathcal{M}\,\mathrm{d}\theta$